Inhalt von Heft 14/3-4

Hinweise für Autoren

Die Manuskripte müssen in *völlig druckfertigem Zustand* eingereicht werden. Sie werden maschinengeschrieben mit doppeltem Zeilenabstand und breitem Rand auf einseitig beschriebenen Blättern erbeten. Ein Manuskript sollte höchstens 20 Druckseiten haben.
Beim Lesen der Formeln darf auch dem Laien über die Stellung und Deutung der Zeichen und Buchstaben kein Zweifel aufkommen. Alle Formeln sind möglichst mit der *Schreibmaschine* zu schreiben, wobei genau darauf zu achten ist, daß *Indizes* und Exponenten trotz des fehlenden Größenunterschiedes genau als solche zu erkennen sind. Andernfalls müssen diese in geringerer Größe mit der Hand eingetragen werden. Besondere Lettern (griechische, gotische usw.) sind durch verschiedenfarbige *Unterstreichung* zu kennzeichnen. Es wird gebeten, auch diese mit der Maschine als lateinische Buchstaben zu schreiben und allein durch die farbige Unterstreichung zu kennzeichnen. Besondere Sorgfalt lege man auf die deutliche Unterscheidung von o, *o*, O, 0; *v*, v, ν, $\bigvee$, V usw.
Kursiv zu setzende Wörter oder Sätze müssen durch Unterstreichen gekennzeichnet werden. Sämtliche Buchstaben in Formeln und Einzelbuchstaben im Text werden *automatisch* kursiv gesetzt und sind deshalb *nicht* besonders zu unterstreichen. Dagegen müssen in Formeln auftretende *Abkürzungen*, die in *Antiqua* gesetzt werden sollen, besonders gekennzeichnet werden.
Es wird erwartet, daß die Autoren eine vollständige Kopie ihrer Arbeit bei sich behalten.
Jedem Manuskript sind auf gesondertem Blatt *Anweisungen für den Satz* beizugeben, auf dem die benutzten Kennzeichnungen sowie verwendete besondere Symbole erklärt werden.
In den Fahnenabzügen sollen nur Satzfehler verbessert, jedoch keine inhaltlichen oder stilistischen Änderungen vorgenommen werden. Nachträgliche (vom Manuskript abweichende) Korrekturen müssen den Autoren in Rechnung gestellt werden. In den Bogenabzügen soll lediglich die richtige Durchführung der in den Fahnen eingetragenen Korrekturen kontrolliert werden. Diese Korrekturen werden daher von der Redaktion gelesen.
Bei Einsendung eines Manuskripts ist die *Adresse des Autors* genau anzugeben. Wechselt der Autor bis zum Erscheinen seiner Arbeit seine Anschrift, so bitten wir in seinem eigenen Interesse dringend um sofortige Benachrichtigung.

Redaktion und Verlag

Alle für das Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung bestimmten Sendungen sind zu richten an: Prof. Dr. Kurt Schütte, 8 München 13, Mathematisches Institut der Universität, Schellingstr. 2—8.

Der Abonnementspreis des Archivs für mathematische Logik und Grundlagenforschung beträgt 60,— DM für den Band (2 Doppelhefte), 30,— DM für das Doppelheft. Verlag und Anzeigenverwaltung: W. Kohlhammer GmbH, Stuttgart 1, Postfach 747, Urbanstr. 12—16.

Arch. math. Logik 14 (1971), 135—147.

DIE PROBLEMATIK APRIORISCHER WAHRSCHEINLICHKEITEN IM SYSTEM DER INDUKTIVEN LOGIK VON RUDOLF CARNAP*

Von Jürgen Humburg, München

Einleitung

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß der Begriff apriorischer Wahrscheinlichkeiten im System der induktiven Logik von Carnap [C] als selbständiger Konstruktionsbestandteil entbehrt werden kann und sich zudem in dieses System nachträglich, ohne zusätzliche Problematik, in eindeutiger Weise einfügen läßt. Damit entfallen die Bedenken gegen das System von Carnap, die von vielen Autoren mit dem Hinweis vorgebracht werden, dieses System beruhe sowohl begrifflich als auch in seiner mathematischen Struktur auf dem Begriff apriorischer Wahrscheinlichkeiten, der aus erkenntnistheoretischen Gründen als unsinnig – etwa als in sich widersprüchlich – abgelehnt werden muß.
Zudem erweist sich der Begriff *a*-priorischer Wahrscheinlichkeiten als ein mathematischer Hilfsbegriff ohne erkenntnistheoretische Problematik.

Bezeichnungen

Wir verwenden – als Bestandteil der Umgangssprache – die folgenden *logistischen Zeichen*:

Logische Implikation. “$A \succ B$” : aus A folgt B.
Logische Äquivalenz. “$A \between B$” : A ist gleichwertig mit B.
Definierender Doppelpunkt. “$A : \between B$” : A definitionsgemäß gleichwertig mit B.
“$a : b$” : a definitionsgemäß gleich b.

Buchstaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

§ 1. Das System der induktiven Logik von Carnap

(1.1) *Fragestellung*

Die induktive Logik hat die Aufgabe, das induktive Schließen zu beschreiben und zu rechtfertigen. Unter einem induktiven Schluß verstehen wir dabei den Schluß von einer Prämisse auf eine Hypothese, die logisch über diese Prämisse hinausgeht. Ein solcher Schluß besitzt keine strenge Gültigkeit, sondern ist immer nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich. Die folgenden Aussagen bilden ein Beispiel für solche Schlüsse:

* Eingegangen am 12. 2. 1970.

Durch die Beobachtung e wird die Hypothese h in hohem Maße bestätigt.
h ist im Hinblick auf e von großer Wahrscheinlichkeit.
h ist auf Grund von e als gesichert zu betrachten.
Die induktive Logik von Carnap stellt sich nun die folgende Aufgabe:
Die intuitiv gebrauchte Aussage, daß eine Hypothese h durch eine Beobachtung e gestützt wird, soll durch Angabe einer Zahl $c(h, e)$ präzisiert werden, die ein Maß dafür darstellt, wie stark h durch e gestützt wird; diese Zahl heißt dabei die induktive Wahrscheinlichkeit von h auf Grund von e.
Die Lösung dieser Aufgabe besteht in der Definition einer Funktion $c(h, e)$, die jedem Paar von Sätzen eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet, sodaß $c(h, e)$ als Maß für die Sicherheit von h auf Grund von e interpretiert werden kann. Die Aussage $c(h, e) = p$ soll dabei eine auf Grund der Definition von c rein logisch entscheidbare Beziehung ohne jeden empirischen Gehalt sein. Mit anderen Worten gesagt soll $c(h, e)$ die Wahrscheinlichkeit sein, die h aus rein logischen Gründen im Hinblick auf e besitzt; $c(h, e)$ heißt deshalb auch die logische Wahrscheinlichkeit von h auf Grund von e.

Noch genauer können wir den Begriff der induktiven Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Begriffs der fairen Wette charakterisieren: $c(h, e)$ soll ein Maß dafür sein, mit welchem Verhältnis der Einsätze wir auf die Richtigkeit von h bei Kenntnis der Richtigkeit von e wetten sollen; $c(h, e)$ läßt sich dann als „fairer Wettquotient" interpretieren — eine Interpretation, die sofort einige der Axiome liefert, die wir im folgenden von der Funktion $c(h, e)$ verlangen werden. Genaueres findet sich in [C], Seite 42.

Der Begriff der induktiven Wahrscheinlichkeit, von Carnap auch Wahrscheinlichkeit[1] genannt, ist scharf zu unterscheiden von anderen Begriffen der Wahrscheinlichkeit, insbesondere dem Begriff der objektiven oder statistischen Wahrscheinlichkeit, wie er etwa von v. Mises [M], Kolmogoroff [K] und Richter [R] entwickelt wird.
Die induktive Wahrscheinlichkeit $c(h, e)$ wurde von Carnap ursprünglich auch als Grad der Bestätigung expliziert, den eine Hypothese h durch eine Beobachtung e erfährt. Die Funktion $c(h, e)$ heißt deshalb bei Carnap auch Bestätigungsfunktion, kurz B-funktion. Neuerdings betrachtet Carnap diese Bezeichnungen als irreführend[1]. Wir wollen hier diese Bezeichnungen als termini technici dennoch beibehalten.
Carnap beantwortet die Frage nach einer B-funktion $c(h, e)$ für Sätze h, e aus einem bestimmten formalen Sprachsystem L. Und zwar wird die Funktion $c(h, e)$ für ein solches Sprachsystem durch eine Reihe von Axiomen festgelegt, die sich aus dem angegebenen Zweck dieser Funktion, das induktive Schließen zu beschreiben, motivieren lassen.

[1] Nach der jetzigen Auffassung Carnaps entspricht es mehr dem Gebrauch der Umgangssprache, wenn wir den Begriff „Bestätigung" als den Zuwachs der logischen Wahrscheinlichkeit explizieren, den eine Hypothese h durch eine Beobachtung e erfährt, verglichen mit der logischen Wahrscheinlichkeit, die h a-priori besitzt; am einfachsten läßt sich dieser Begriff der Bestätigung durch die folgende Differenz darstellen: $c(h, e) - c(h, t)$; $c(h, t)$ ist dabei die A-priori-Wahrscheinlichkeit von h. (Genaueres siehe [C'], Vorwort zur zweiten Auflage, XVII.

(1.2) *Das Sprachsystem L*

Wir geben eine kurze Darstellung des Sprachsystems L; genaueres siehe [C], Seite 138ff.

a) L enthält:
N Individuenkonstanten „a_1", ..., „a_N"; $1 \leq N \leq \infty$ ($N = \infty$ symbolisiert dabei den Fall abzählbar unendlich vieler Individuenkonstanten). Unendlich viele Variable „x", „y", ... für den Individuenbereich, der durch die obigen Individuenkonstanten gegeben ist.
Eine Familie von einstelligen Grundprädikaten „P_1", ..., „P_k", die auf dem Individuenbereich definiert sind; $1 < k < \infty$.
Die folgenden logischen Zeichen:
„$\neg$" Negation, „." Konjunktion, „$\vee$" Disjunktion, „$\rightarrow$" Implikation, „$\equiv$" Äquivalenz, „$\forall x$", „$\exists x$" All- und Existenzoperator (die Variable der Quantoren bezieht sich dabei auf den Individuenbereich).
Das Zeichen „$=$" für die Identität von Individuen.
„t" als Zeichen für eine Tautologie. Klammern „(„ ,")" als Hilfssymbole.
Die Sätze von L sind die auf die übliche Weise mit diesen Mitteln bildbaren Sätze; wir bezeichnen die Menge dieser Sätze ebenfalls mit L. Um die jeweilige Anzahl der Individuenkonstanten anzugeben, schreiben wir manchmal statt L auch L_N.

b) Ist r ein Satz von L, so soll „$\vdash r$" bedeuten, r ist aus rein logischen Gründen wahr, kurz L-wahr; analog bedeutet „$\vdash \neg r$", r ist L-falsch.
Ein Satz heißt L-determiniert, wenn er L-wahr oder L-falsch ist.
Ein Satz heißt generell, wenn er mindestens einen Quantor enthält.

c) Ist $N < \infty$, so lassen sich die Sätze der Gestalt $\exists x F x$, $\forall x F x$[2] durch die folgenden logisch äquivalenten Ausdrücke ersetzen:

$$(F a_1) \vee \ldots \vee (F a_N), \quad (F a_1) \ldots (F a_N).$$

Ist $N < \infty$, so sind also alle in L_N bildbaren Sätze logisch äquivalent zu endlichen aussagenlogischen Verknüpfungen der „Atomsätze" „$P_i\, a_j$".

d) Über die Grundprädikate „P_1", ..., „P_k" machen wir noch die Voraussetzung, daß „P_1", ..., „P_k" eine vollständige logische Disjunktion bilden, *dh.* es soll gelten:
$\vdash \neg(P_i . P_j)\, a$ für $i \neq j$, $\vdash (P_1 \vee \ldots \vee P_k)\, a$; a ist eine beliebige Individuenkonstante.
(Der Ausdruck „$(M.\, M')\, a$" dient als Abkürzung für den Ausdruck „$M a.\, M' a$"; analoges gilt für die übrigen aussagenlogischen Zeichen)

e) Sei $N < \infty$; dann verstehen wir unter einer Zustandsbeschreibung von L_N einen Satz der folgenden Gestalt:

$$„P_{i_1} a_1 \ldots P_{i_N} a_N".$$

[2] „F" stellt hier eine metasprachliche Variable für die Prädikate von L dar. Bereits in b) gebrauchten wir lateinische Buchstaben als metasprachliche Namen für Gegenstände aus L. Wir werden dies auch im folgenden tun. Außerdem gebrauchen wir die Konvention, daß ein objektsprachliches Zeichen innerhalb einer metasprachlichen Formel als sein eigener metasprachlicher Name fungiert. (Genaueres siehe [C], 138ff).

Es gilt:
Jede Zustandsbeschreibung ist **faktisch**, d.h. nicht L-determiniert. Zwei Zustandsbeschreibungen sind entweder logisch äquivalent oder kontradiktorisch. Jeder nicht kontradiktorische Satz von $L_N^{\sim}$ läßt sich als Disjunktion von Zustandsbeschreibungen darstellen.
Ein Satz z von L_N ist genau dann eine Zustandsbeschreibung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) z ist nicht logisch falsch, also nicht $\vdash \neg z$.
2) Ist h ein Satz aus L_N mit der Eigenschaft $\vdash h \to z$, so gilt $\vdash \neg h$ oder $\vdash h \equiv z$.

f) Carnap behandelt auch den Fall, daß L mehrere Familien von Prädikaten enthält. Wir beschränken uns hier auf Sprachsysteme mit nur einer Familie von Prädikaten.

(1.3) *Das Axiomensystem für die Bestätigungsfunktion* $c(h, e)$

Wir geben eine kurze Darstellung der von Carnap formulierten Axiome für die B-funktion $c(h, e)$; h, e sind dabei Sätze eines Sprachsystems L der oben geschilderten Art.
Auf die Motivierung dieser Axiome aus der in (1.1) formulierten Vorstellung gehen wir hier nicht ein.
Eine ausführlichere Darstellung dieses Axiomensystems findet sich in [C], Anhang B.

Generelle Voraussetzung: Die Prämisse e in $c(h, e)$ sei nicht L-falsch.

Grundaxiome

NA1. $0 \leqq c(h, e) \leqq 1$.

NA2. Wenn $\vdash e \to h$, dann $c(h, e) = 1$.

NA3. Additionsprinzip. Wenn $e.h.h'$ L-falsch, dann gilt:
$c(h \vee h', e) = c(h, e) + c(h', e)$.

NA4. Multiplikationsprinzip. Ist $e.h$ nicht L-falsch, so gilt:
$c(h.h', e) = c(h, e)\, c(h', e.h)$.

NA5. Wenn $\vdash e \equiv e'$ und $\vdash h \equiv h'$, dann $c(h, e) = c(h', e')$.

Regularitätsaxiom

NA6. Sind h, e Sätze von L_N mit $N < \infty$, so gilt:
Aus $c(h, e) = 1$ folgt $\vdash e \to h$.

Invarianzaxiome

NA7. $c(h, e)$ ist invariant bei Permutation der Individuen.

NA8. $c(h, e)$ ist invariant bei Permutation der Grundprädikate.

Diese beiden Axiome ergeben sich aus der Forderung, daß $c(h, e)$ nur von der logischen Struktur von h, e abhängt, nicht aber von den speziellen in h, e vorkommenden Individuen und Grundprädikaten.

NA9. Entfällt wegen (1.2f).

NA10. Enthalten h, e keine Quantoren, so ist $c(h, e)$ unabhängig von der Gesamtzahl N der in L betrachteten Individuen.

NA11. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

Axiom der Relevanz von Einzelfällen

NA12. e enthalte keine Quantoren. a, b seien zwei verschiedene Individuenkonstanten, die beide in e nicht vorkommen; M ein faktisches Molekularprädikat, *dh.* $M =$ „$P_{i_1} \vee \ldots \vee P_{i_s}$“ mit $1 \leqq s < k$.
Dann gilt:
a) $c(Mb, e.Ma) \geqq c(Mb, e)$[3].
b) $c(Mb, e.Ma) \neq c(Mb, e)$.

Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese soll also mit jeder positiven Instanz zunehmen.

NA13. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

Axiom der Voraussageirrelevanz

NA14. e beschreibe eine Stichprobe vom Umfang s, *dh.* e gebe an, welches der P_i den einzelnen Individuen der Stichprobe zukommt; e_1 entstehe aus e dadurch, daß alle „P_i“ mit $i \neq 1$, die in e vorkommen, durch „$\neg P_1$“ ersetzt werden. a sei eine Individuenkonstante, die nicht in e vorkommt. Dann gilt: $c(P_1 a, e) = c(P_1 a, e_1)$
Die Bestätigung von „$P_1 a$“ auf Grund einer Stichprobe soll also nur davon abhängen, wie oft P_1 und $\neg P_1$ in dieser Stichprobe vorkommen.

NA15. Für den Fall, daß es nur zwei Grundprädikate gibt, also $k = 2$ beträgt, ist ein spezielles, zusätzliches Axiom nötig, das hier nicht wiedergegeben wird; eine Formulierung dieses Axioms findet sich in §2 (2.3g) Seite 11.

NA16. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

Axiom des unendlichen Individuenbereiches

NA17. Die B-Funktion in L_∞ soll sich als Limes der B-Funktionen der endlichen Systeme darstellen lassen.

Das ist wie folgt zu verstehen: Zu jedem Satz h_∞ aus L_∞ läßt sich in allen Systemen L_N mit N größer einem geeigneten N' das Analogon h_N bilden. Ist h_∞ nicht generell, so haben h_N und h_∞ dieselbe Bedeutung; im anderen Fall ist die Bedeutung dieser Sätze verschieden, da sich die Quantoren in h_∞ und h_N auf verschiedene Individuenbereiche beziehen. Das obige Axiom besagt nun: $c(h_\infty, e_\infty) = \lim_{N \to \infty} c(h_N, e_N)$; existiert dieser Limes nicht, so ist $c(h_\infty, e_\infty)$ nicht definiert. Sind h_∞, e_∞ nicht generell, so gilt nach NA10: $c(h_\infty, e_\infty) = c(h_N, e_N)$.

(1.4) *Die Nullbestätigung* $m(h)$

Nach NA4, NA6 gilt für $N < \infty$:
$c(h, e) = m(h.e)/m(e)$ mit $m(h) := c(h, t)$.
Die Werte von c lassen sich also für $N < \infty$ durch die Werte von m darstellen.
$m(h)$ stellt die „Bestätigung“ von h durch die tautologische Prämisse „t“ dar.
$m(h)$ heißt dementsprechend **Nullbestätigung**.

[3] NA12a ist überflüssig; siehe [Hu].

$m(h)$ läßt sich etwa als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, die h aus rein logischen Gründen besitzt.
In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß die Benutzung einer solchen apriorischen Wahrscheinlichkeit $m(h)$ auf Grund der obigen Axiome ohne zusätzliche Problematik ist.

(1.5) *Die Bestätigungsfunktionen* $c_\lambda(h, e)$

Die B-Funktion $c(h, e)$ ist durch die obigen Axiome bis auf einen reellen Parameter λ eindeutig festgelegt.
In einem Sprachsystem L_N mit $N < \infty$ sind nämlich die Werte für c durch die Werte $m(z)$ der Zustandsbeschreibungen z von L_N festgelegt; dies folgt aus (1.4) und NA3. Sei nun z eine solche Zustandsbeschreibung, in der N_i-mal das Prädikat „P_i" vorkommt; dann gilt auf Grund der Axiome (1.3):

$$m(z) = \frac{\prod_{i=1}^{k} (N_i + \lambda/k - 1)^{[N_i]}}{(N + \lambda - 1)^{[N]}}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} N_i = N .$$

Der Ausdruck $a^{[n]}$ ist dabei wie folgt definiert; $a^{[n]} := a(a-1)(a-2) \ldots (a-n+1)$
(Der Beweis findet sich in [C], Seite 249ff)
Wir bezeichnen die zu dem Parameter λ gehörende B-Funktion mit c_λ. Der Kürze halber unterschlagen wir manchmal den Index λ und gebrauchen dafür die Ausdrucksweise „eine Carnapsche B-funktion c".

(1.6) *Die Interpretation des Parameters* λ

e beschreibe eine Stichprobe vom Umfang s, in der s_1-mal P_1 und $(s - s_1)$-mal $\neg P_1$ vorkommt; die Individuenkonstante a komme nicht in e vor. Dann gilt:

$$c(P_1 a, e) = \frac{(s_1/s)\, s + \lambda(1/k)}{\lambda + s} \qquad \text{(Beweis [C], Seite 250)}$$

$c(P_1 a, e)$ entsteht durch gewogene Mittelung aus der „empirischen Wahrscheinlichkeit" s_1/s (relative Häufigkeit von P_1 in der Stichprobe) und der „logischen Wahrscheinlichkeit" $1/k$ (k Prädikate bedeuten k logisch gleichwertige Möglichkeiten). Die „logische" Wahrscheinlichkeit wird mit dem Gewicht λ, die „empirische" mit dem Gewicht s bewertet.
(1.7) Wir wollen in dieser Arbeit nicht auf das Problem eingehen, die B-Funktion $c(h, e)$ eindeutig festzulegen, d.h. den Parameter λ zu spezialisieren. Überlegungen von Carnap zu diesem Punkt finden sich in [C''], Seite 76ff.

§ 2 Die Bedeutung der Nullbestätigung (apriorischer Wahrscheinlichkeiten) im System der induktiven Logik von Carnap

(2.1) *Problemstellung*

a) Der in § 1 gegebene Aufbau der induktiven Logik von Carnap benutzt infolge

der Zulassung tautologischer Prämissen den Begriff der Nullbestätigung, d.h. apriorischer Wahrscheinlichkeiten. (Siehe [1.4])

Das Axiomensystem (1.3) macht nämlich durch die Zulassung tautologischer Prämissen Aussagen über die Beschaffenheit der Nullbestätigung und fordert weiterhin durch den Multiplikationssatz [siehe (1.4]) einen Zusammenhang zwischen der Nullbestätigung und der B-funktion im allgemeinen Falle. Nach dem Beweis von Carnap führt das Axiomensystem (1.3), bei Ausnutzung des Begriffs der Nullbestätigung, d.h. bei Verwendung tautologischer Prämissen zu den B-funktionen c_λ. Noch stärker als hier tritt die Bedeutung der Nullbestätigung im ursprünglichen Aufbau der induktiven Logik von Carnap hervor. (Siehe [C] Teil II).

b) Manche Autoren lehnen den Begriff der Nullbestätigung ab und sehen sich dadurch gezwungen, die gesamte Carnapsche Theorie, insbesondere die B-Funktion c_λ, die mit Hilfe dieses Begriffs gewonnen wurde, in Frage zu stellen.
So schreiben etwa:

R. Harrod (Foundations of Inductive Logic, Seite 27, [H]):

"There is no meaning in holding something to be probable in and by itself; and no meaning therefore in postulating an initial prior probability".
". . . a flagrant violation of the characterization of probability as a relation between a premise and a conclusion".

H. E. Kyburg (Probability and the logic of rational belief, S. 51, [K']):

"All c-functions defined in the way that Carnap has suggested yield values for the confirmation of a hypothesis on null evidence. This seems a little questionable in itself, . . ."

c) Diese Arbeit wird zeigen, daß sich der Begriff der Nullbestätigung in dem in § 1 gegebenen Aufbau der induktiven Logik entbehren läßt. Es gilt nämlich:

Satz

Das Axiomensystem (1.3) führt auch bei Ausschluß tautologischer Prämissen zu der B-Funktion c_λ.

Wir wollen die Struktur dieser Aussage an einem Beispiel verdeutlichen: Anstelle der B-funktionen $c(h, e)$ betrachten wir die reellen Funktionen $f(x)$ auf dem Einheitsintervall. Als Axiom wählen wir die Forderung der Stetigkeit; den tautologischen Prämissen mögen die Randpunkte des Intervalls entsprechen. Die Menge der Funktionen, die das Axiom erfüllen, wird größer, wenn wir die Randpunkte ausschließen. Im Gegensatz zu diesem Beispiel sagt der obige Satz, daß die Menge der B-funktionen, die (1.3) erfüllen, durch Ausschluß tautologischer Prämissen nicht vergrößert wird.

Die Funktion der Nullbestätigung $m_\lambda(h)$ stellt so gesehen nur ein mathematisches Mittel dar, die allgemeine B-Funktion einfach zu charakterisieren. Eine Interpretation der Funktion $m_\lambda(h)$ als Nullbestätigung ist nicht notwendig, aber nach dieser Überlegung gefahrlos möglich.

d) Es ist sinnvoll, die Funktion $m_\lambda(h)$ als Nullbestätigung zu interpretieren.
Die Funktion $m_\lambda(h)$ ist nämlich in diesem Axiomensystem die eindeutig bestimmte Fortsetzung auf tautologische Prämissen der zunächst nur für nicht-tautologische Prämissen definierten B-Funktion. Dies folgt aus dem Beweis von Carnap, daß bei Zulassung tautologischer Prämissen genau die Funktionen c_λ (1.3) erfüllen.

Akzeptieren wir also die Axiome von (1.3) für nichttautologische Prämissen, so gelangen wir fast zwangsläufig zu einem Begriff der Nullbestätigung als der eindeutig bestimmten Fortsetzung der allgemeinen B-Funktion auf tautologische Prämissen.

e) *Ergebnis*

Der Begriff der Nullbestätigung ist nicht als selbständiger Bestandteil zu dem in §1 gegebenen Aufbau der induktiven Logik nötig. Vielmehr läßt sich dieser Begriff aus diesem Aufbau gewinnen und rechtfertigen. Für die in der Literatur bestehende Polemik bezüglich des Begriffs der Nullbestätigung ergibt sich damit die folgende Konsequenz:
Eine Ablehnung des Begriffs der Nullbestätigung bedeutet eine Ablehnung der Carnapschen Axiome auch für nichttautologische Prämissen.
Eine Annahme der Carnapschen Axiome für nichttautologische Prämissen bedeutet auch eine Annahme des Begriffs der Nullbestätigung.

(2.2) Der Satz (2.1 c) ergibt sich aus den folgenden Sätzen. Zunächst eine Definition:

a) *Definition*

Sei $e := P_i b_1 \ldots P_i b_n . \neg P_i b_{n+1} \ldots \neg P_i b_s$, $a \neq b_j$ für $j = 1, \ldots, s$.
Nach den Invarianzaxiomen hängt $c(P_i a, e)$ nur von n, s, k (Zahl der Grundprädikate) ab. Wir können also die folgende Definition vornehmen:

$$G_k(n, s) := c(P_i a, e) .$$

Der Kürze halber unterdrücken wir manchmal den Index k und schreiben nur: $G(n, s)$.

b) *Satz*

Auf Grund der Axiome bei Ausschluß tautologischer Prämissen gilt:

$$G_k(n, s) = \frac{n - (kn - 1)\, G_k(0,1)}{s - (s - 1)\, k G_k(0,1)} , \quad 0 \leqq n \leqq s .$$

c) *Satz*

Durch $G(n, s)$ ist $c(h, e)$ auf Grund der Axiome bei Ausschluß tautologischer Prämissen eindeutig bestimmt.

d) *Satz*

Es gilt: $0 < G_k(0, 1) < 1/k$.
Die durch G_k nach c) bestimmte B-funktion ist die Funktion c_λ mit $\lambda := k G_k(0, 1)/(1 - k G_k(0, 1))$; also $0 < \lambda < \infty$.
Nach d) erfüllen also bei Ausschluß tautologischer Prämissen höchstens die Funktionen c_λ das Axiomensystem (1.3). Da Carnap gezeigt hat, daß c_λ (1.3) erfüllt, ist mit diesen drei Sätzen (2.1 c) bewiesen.

(2.3) *Beweis von (2.2 b)*
Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze:

a) *Hilfssatz:* $s_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{k} s_i = s \;\succ\; \sum_{i=1}^{k} G_k(s_i, s) = 1$.

Beweis: $e_F := P_1 b_1 \ldots P_1 b_{s_1} . P_2 b_{s_1+1} \ldots P_2 b_{s_1+s_2} . P_3 b_{s_1+s_2+1} \ldots P_k b_s$;
$e_i := P_i b_1 \ldots P_i b_{s_i} . \neg P_i b_{s_i+1} \ldots \neg P_i b_s$. Ist $a \neq b_j$ für $j = 1, \ldots, s$, so gilt nach NA14: $G(s_i, s) = c(P_i a, e_i) = c(P_i a, e_F)$ und folglich $1 = \sum_i c(P_i a, e_F) = \sum_i G(s_i, s)$.

b) *Hilfssatz:* $G_k(1, 1) = 1 - (k - 1)\, G_k(0, 1)$.

Der Beweis ergibt sich aus a) mit $(s_1, \ldots, s_k) = (1, 0, \ldots, 0)$.

c) *Hilfssatz:* $G_k(s + 1, s + 1) = 1 - (k - 1)\, G_k(0, s + 1)$.

Beweis: Aus a) mit $(s_1, \ldots, s_k) = (s + 1, 0, \ldots, 0)$.

d) *Hilfssatz:* $k > 2 \;\succ\; G_k(n, s + 1) = G_k(0, s + 1)\, G_k(n, s)/G_k(0, s)$; $n \leqq s$.

Beweis: $e := P_1 b_1 \ldots P_1 b_n . P_3 b_{n+1} \ldots P_3 b_s$, $a, b \neq b_1, \ldots, b_s$; dann gilt:
$c(P_1 a . P_2 b, e) = c(P_1 a, e)\, c(P_2 b, e . P_1 a)$
$\qquad = c(P_2 b, e)\, c(P_1 a, e . P_2 b)$ Multiplikationsprinzip
also $c(P_1 a, e)\, c(P_2 b, e . P_1 a) = c(P_2 b, e)\, c(P_1 a, e . P_2 b)$.
$c(P_1 a, e) = G(n, s)$; $c(P_2 b, e) = G(0, s)$; $c(P_1 a, e . P_2 b) = G(n, s + 1)$
$c(P_2 b, e . P_1 a) = G(0, s + 1)$. Durch Einsetzen ergibt sich:
$G(n, s)\, G(0, s + 1) = G(0, s)\, G(n, s + 1)$; $G(0, s) \neq 0$ nach NA6.

e) *Hilfssatz:* $k > 2 \;\succ\; G_k(0, s + 1)\, [(G_k(s, s) + G_k(1, s))/G_k(0, s) + k - 2] = 1$.

Beweis: $G(s, s + 1) + G(1, s + 1) + (k - 2)\, G(0, s + 1) = 1$;
aus a) für $(s, 1, 0, \ldots, 0)$.
Ersetzt man $G(s, s + 1)$, $G(1, s + 1)$ nach Formel d), so erhält man die behauptete Gleichung.

f) Für $k > 2$ ergibt sich (2.2 b) durch Induktion nach s.
Induktionsanfang ($s = 1$): Der Fall $n = 0$ ist trivial, der Fall $n = 1$ ergibt sich aus b).

Induktionsschritt. (2.2 b) sei richtig für s; dann gilt:

1) $$G(0, s + 1) \overset{e)}{=} [G(s, s)/G(0, s) + G(1, s)/G(0, s) + k - 2]^{-1}$$
$$= \left[\frac{s - (ks - 1)\, G(0,1)}{s - (s - 1)\, G(0,1)\, k} \cdot \frac{s - (s - 1)\, kG(0,1)}{G(0,1)} + \frac{(s - (s - 1)\, kG(0,1))\, (1 - (k - 1)\, G(0,1))}{(s - (s - 1)\, kG(0,1))\, G(0,1)} + k - 2\right]^{-1}$$
$$= G(0, 1)/(s + 1 - skG(0, 1)) .$$

2) $$G(n, s + 1) \overset{d)}{=} G(0, s + 1)\, G(n, s)/G(0, s) = \frac{n - (kn - 1)\, G(0,1)}{s + 1 - skG(0,1)} , \quad n \leqq s;$$

das ergibt sich aus 1) und aus der Induktionsvoraussetzung.

3) $G(s+1, s+1) \overset{c)}{=} 1 - (k-1)\, G(0, s+1) \overset{1)}{=} \dfrac{s+1-(k(s+1)-1)\, G(0{,}1)}{s+1-skG(0{,}1)}$.

g) Für den Fall $k = 2$ benötigen wir das Axiom NA15.
NA15. $G_2(n, s)$ ist bei gegebenem $G_2(0, 1)$ und festem s eine lineare Funktion von n.
Die Rechtfertigung dieses Axioms ergibt sich aus der Gültigkeit der analogen Aussage für $k > 2$.
Wir können nun d), e) auch für $k = 2$ beweisen.

d') *Hilfssatz:* $G_2(n, s+1) = G_2(0, s+1)\, G_2(n, s)/G_2(0, s)$, $n \leqq s$.

Beweis:

1) $e := P_1 b_1 \ldots P_1 b_n .\, P_2 b_{n+1} \ldots P_2 b_s$; $a, b \neq b_i$.
$c(P_1 a .\, P_2 b, e) = c(P_1 a, e)\, c(P_2 b, P_1 a .\, e) = c(P_2 b, e)\, c(P_1 a, e .\, P_2 b)$.
$c(P_1 a, e) = G(n, s)$, $c(P_2 b, e) = G(s-n, s)$, $c(P_1 a, e .\, P_2 b) = G(n, s+1)$,
$c(P_2 b, e .\, P_1 a) = G(s-n, s+1)$.
Also: $G(n, s)\, G(s-n, s+1) = G(s-n, s)\, G(n, s+1)$.

2) Nach NA15 läßt sich $G(n, s)$ wir folgt darstellen:
$G(n, s) = nf(s) + a(s)$. Setzt man diese Darstellung in die unter 1) gewonnene Formel ein, so ergibt sich: $f(s+1)\, a(s) = f(s)\, a(s+1)$, also
$[nf(s+1) + a(s+1)]\, a(s) = [nf(s) + a(s)]\, a(s+1)$.
Also: $G(n, s+1)\, G(0, s) = G(0, s+1)\, G(n, s)$.

e') Die Formel e) ergibt sich für $k = 2$ aus d') und a) völlig analog wie für $k > 2$.
Damit läßt sich derselbe Induktionsbeweis wie unter f) durchführen.

(2.4) *Beweis von (2.2 c)*

a) *Hilfssatz:* Sei e nicht L-determiniert und z eine Zustandsbeschreibung der folgenden Gestalt: $z = P_1 b_1 \ldots P_1 b_{N_1} P_2 b_{N_1+1} \ldots P_k b_N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{k} N_i$.
($b_1, \ldots, b_N$ stellen eine gewisse Reihenfolge der Individuenkonstanten „a_1", ..., „a_N" dar). Dann gilt:
$z .\, e$ ist kontradiktorisch und somit $c(z, e) = 0$ oder

$$c(z, e) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{N_i} c(P_i b_{m_i+j}, e .\, P_1 b_1 \ldots P_i b_{m_i+j-1}),\quad m_i := \sum_{r=1}^{i-1} N_r .$$

Beweis: Sei $z .\, e$ nicht kontradiktorisch; z_i das i-te Konjunktionsglied von z (also $\vdash z \equiv z_1 \ldots z_N$); dann ist auch $z_i .\, e$ nicht kontradiktorisch, und folglich gilt auf Grund des Multiplikationssatzes:

$$c(z, e) = c(z_1, e)\, c(z_2 \ldots z_N, e .\, z_1) = c(z_1, e)\, c(z_2, e .\, z_1)\, c(z_3, e .\, z_1 .\, z_2) \ldots$$
$$\ldots c(z_N, e .\, z_1 \ldots z_{N-1}) = \prod_{j=1}^{N_1} c(P_1 b_j, e .\, P_1 b_1 \ldots P_1 b_{j-1})$$
$$\prod_{j=1}^{N_2} c(P_2 b_{N_1+j}, e .\, P_1 b_1 \ldots P_2 b_{N_1+j-1}) \ldots \prod_{j=1}^{N_k} c(P_k b_{m_k+j}, e .\, P_1 b_1 \ldots P_k b_{m_k+j-1}) .$$

b) *Hilfssatz:* $c(h, P_r a)$ ist für jedes h durch $G(n, s)$ eindeutig bestimmt.
Beweis: Nach dem Additionssatz dürfen wir uns bei h auf Zustandsbeschreibungen beschränken. Sei z eine beliebige Zustandsbeschreibung; dann läßt sich o.E. annehmen, daß z die gleiche Gestalt wie in a) hat. Ist also $z .\, P_r a$ nicht kontradiktorisch, so stellt $c(z, P_r a)$ nach a) ein Produkt von Ausdrücken der folgenden Gestalt dar: $c(P_i b_{m_i+j}, P_r a .\, P_1 b_1 \ldots P_i b_{m_i+j-1})$.

Ist $a \neq b_1, \ldots, b_{m_i+j}$, dann gilt:

$$c(P_i b_{m_i+j}, P_r a \ldots P_i b_{m_i+j-1}) = \begin{cases} G(j-1, m_i+j) & \text{für } i \neq r \\ G(j, m_i+j) & \phantom{\text{für }} i = r \end{cases}$$

Ist $a = b_{m_n+t}$, $m_n + t \leqq m_i + j$; dann ist $P_r = P_n$, da $z .\, P_r a$ nicht kontradiktorisch. Also:

$$c(P_i b_{m_i+j}, P_r a \ldots P_i b_{m_i+j-1}) = \begin{cases} G(j-1, m_i+j-1) & \text{für } m_n + t < m_i + j \\ 1 & \phantom{\text{für }} m_n + t = m_i + j \end{cases}$$

c) *Hilfssatz:* Ist $e .\, P_r a$ nicht kontradiktorisch, so ist $c(h, e .\, P_r a)$ für jedes h durch $G(n, s)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $c(h, e .\, P_r a) = c(h .\, e, P_r a)/c(e, P_r a)$; mit b) folgt dann die Behauptung.

d) *Hilfssatz:* Sei e eine feste, nicht L-determinierte Prämisse. Dann gilt:
Ist $c(P_r a, e)$ für beliebiges a und beliebiges r durch $G(n, s)$ eindeutig bestimmt, so auch $c(h, e)$ für beliebiges h.

Beweis: Wie unter b) dürfen wir uns bei h wieder auf ein z von derselben Gestalt wie in a) beschränken. Wir müssen wieder zeigen, daß die Ausdrücke $c(P_i b_{m_i+j}, e .\, P_1 b_1 \ldots P_i b_{m_i+j-1})$ eindeutig bestimmt sind. Ist $m_i + j \geqq 2$, so folgt dies aus c).
Ist $m_i + j = 1$, so ist $c(P_i b_1, e)$ eindeutig nach Voraussetzung.

e) *Hilfssatz:* Sei e nicht L-determiniert; dann ist $c(P_r a, e)$ für beliebiges a und beliebiges r eindeutig durch $G(n, s)$ bestimmt.

Beweis

1) Wir dürfen uns an Stelle von e auf Prämissen e_0 der folgenden Gestalt beschränken: $e_0 := M_1 b_1 \vee \ldots \vee M_n b_n$, M_i sind dabei faktische Molekularprädikate, haben also die Gestalt: $P_{i_1} \vee \ldots \vee P_{i_s}$, $1 \leqq s < k$.
Es gilt nämlich die folgende Aussage (Satz über die konjunktive Normalform; siehe etwa [Hi] §5):

> Jeder Satz von L_N läßt sich als (mehrgliedrige) Konjunktion von (mehrgliedrigen) Disjunktionen darstellen; dabei besteht jedes Disjunktionsglied dieser Disjunktionen aus negierten oder unnegierten Atomformeln.

Es läßt sich also annehmen, daß gilt: $e = e' .\, e_0$ mit einem e_0 der obigen Gestalt.
Ist nun $c(P_r a, e_0)$ eindeutig bestimmt, so nach d) auch $c(h, e_0)$ und folglich wegen $c(P_r a, e) = c(P_r a .\, e', e_0)/c(e', e_0)$ auch $c(P_r a, e)$. Man kann sich also auf Prämissen der Gestalt e_0 beschränken.
Wir beweisen e) durch Induktion nach n (n „Länge" von e_0).

2) Induktionsanfang $n = 1$. Mit den Abkürzungen $b := b_1$, $M := M_1$, $P :=$ „P_r" haben wir also die folgende Behauptung zu beweisen: $c(Pa, Mb)$ ist durch $G(n, s)$ eindeutig bestimmt.

2.1) Fall: $a = b$.
$M = \bigvee_I P$ (M ist eine Disjunktion von Prädikaten „P_i“ mit $i \in I$).

2.1a) $r \notin I$, dann $c(Pa, Ma) = 0$.

2.1b) $r \in I$, dann:
$c(P_j a, Ma) = c(Pa, Ma)$, wenn $j \in I$. $\sum_I c(P_j a, Ma) = c(Ma, Ma) = 1$.
Also: $c(Pa, Ma) = 1/|I|$; $|I|$ Mächtigkeit von I.

2.2) Fall: $a \neq b$.

2.2a) $r \notin I$:
$c(Pa, Mb) = c(Pa, \neg Pb. Mb) = c(Pa. Mb, \neg Pb)/c(Mb, \neg Pb)$.
Nach 2.1b): $c(Mb, \neg Pb) = |I|/(k-1)$.
Für $i \in I$ gilt: $c(Pa. P_i b, \neg Pb) = c(P_i b, \neg Pb)\, c(Pa, P_i b) = [1/(k-1)]\, G(0, 1)$.
Also: $c(Pa. Mb, \neg Pb) = [|I|/(k-1)]\, G(0, 1)$. Also: $c(Pa, Mb) = G(0, 1)$.

2.2b) $r \in I$:
$c(\neg Ma, Mb) = \sum_{i \notin I} c(P_i a, Mb) = (k - |I|)\, G(0, 1)$; nach 2.2a).
$c(Pa, Mb) = c(Ma, Mb)/|I| = (1 - (k - |I|)\, G(0, 1))/|I|$.

3) Induktionsschritt. Für n sei die Behauptung gezeigt;
$e := e_0 \vee Mb = M_1 b_1 \vee \ldots \vee M_n b_n \vee Mb$.

3.1) $c(Pa, e) = c(Pa. Mb, e) + c(Pa. \neg Mb, e) = c(Pa, Mb)\, c(Mb, e)$
$+ c(\neg Mb, e)\, c(Pa, \neg Mb. e) = c(Mb, e)\, [c(Pa, Mb) - c(Pa, \neg Mb. e)]$
$+ c(Pa, \neg Mb. e)$.
Nach dem Induktionsanfang 2) ist $c(Pa, Mb)$ eindeutig bestimmt, also nach d) auch $c(h, Mb)$. Da M beliebig war, gilt dasselbe für $\neg M$, also ist auch $c(Pa, \neg Mb. e$ $= c(Pa. e, \neg Mb)/c(e, \neg Mb)$ eindeutig bestimmt. Wir müssen also nur noch die eindeutige Bestimmtheit von $c(Mb, e)$ beweisen.

3.2) $c(\neg Mb, e) = c(\neg Mb, e. e) = c(\neg Mb. e, e)/c(e, e) = c(\neg Mb. e_0, Mb \vee e_0)$
$= c(\neg Mb, e_0)\, c(e_0, Mn \vee e_0)$.

3.3) $1 = c(\neg Mb, e) + c(Mb, e) = c(\neg Mb, e_0)\, c(e_0, e) + c(Mb, e)$; nach 3.2).

3.4) $c(e_0, e) = c(e_0. Mb, e) + c(e_0. \neg Mb, e) = c(e_0, e. Mb)\, c(Mb, e)$
$+ c(e_0, e. \neg Mb)\, c(\neg Mb, e) = c(Mb, e)\, [c(e_0, Mb. e) - c(e_0, e. \neg Mb)]$
$+ c(e_0, e. \neg Mb)$.
Aus 3.3), 3.4) folgt:

3.5) $c(Mb, e)\, \{c(\neg Mb, e_0)\, [c(e_0, e. Mb) - c(e_0, e. \neg Mb)] + 1\}$
$+ c(\neg Mb, e_0)\, c(e_0, e. \neg Mb) = 1$.
Nach Induktionsannahme ist $c(Pa, e_0)$ eindeutig bestimmt und folglich nach d) $c(h, e_0)$ für jedes h. Nach 3.1) und d) ist $c(h, e. Mb)$, $c(h, e. \neg Mb)$ eindeutig bestimmt. Also ist $c(Mb, e)$ durch 3.5) eindeutig bestimmt.
Damit ist (2.2 c) bewiesen.

(2.5) *Beweis von (2.2d)*

a) $G_k(0, 1) \leq 1/k$. Wäre nämlich $G_k(0, 1)$ größer $1/k$, also:
$G_k(0, 1) = 1/k + v$ mit $v > 0$; dann gäbe es ein n und ein s ($n \leq s$), so daß $G_k(n, s) \leq 0$ im Widerspruch zu NA1, NA6.

Beweis

$$G(n, s) = Z/N \quad \text{mit} \quad Z := n - (kn - 1)\,(1/k + v)$$
$$N := s - (s - 1)\,(1 + kv).$$

1. Fall: $v \leq \frac{1}{k(k-1)}$; dann $1/k - vk + v \geq 0$.
$n = 1 \;>\; Z = 1 - (k-1)\,(1/k + v) = 1/k - vk + v \geq 0$.
$s > 1 + 1/kv \;>\; N = s - s - skv + 1 + kv = kv + 1 - skv < 0$.
Für $n = 1, s > 1 + 1/kv$ gilt also $Z/N \leq 0$.

2. Fall: $v > \frac{1}{k(k-1)}$; dann gilt für $n = 1, s = 1$:
$Z = 1/k - vk + v < 0, N = 1 + kv - skv = 1$, also $Z/N < 0$.

b) $G_k(0, 1) \neq 1/k$. Wäre nämlich $G_k(0, 1) = 1/k$, so wäre $G_k(0, 1) = G_k(1, 2)$; dies stünde im Widerspruch zu NA12b.

c) Aus NA6 folgt $G_k(0, 1) > 0$.

d) Aus Formel (1.6) ergibt sich, daß das in (2.2 d) definierte λ zu einer B-Funktion c_λ führt, die für die entsprechenden Argumente mit $G(n, s)$ übereinstimmt. Also ist c_λ die nach (2.2 c) durch $G(n, s)$ bestimmte B-Funktion.

LITERATUR

[C] Carnap, Stegmüller: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. (Wien 1958).
[C′] Carnap: Logical foundations of probability. Second edition. (Chicago 1962).
[C″] Carnap: The continuum of inductive methods. (Chicago 1952).
[H] R. Harrod: Foundations of inductive logic. (London 1956).
[Hu] J. Humburg: The principle of instantial relevance. (Studies in Induction and Probability Vol. I, University of California Press, voraussichtlich 1970).
[Hi] Hilbert, Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. (Berlin 1959).
[K] Kolmogoroff: Foundations of the theory of probability. (New York 1956).
[K′] H. E. Kyburg: Probability and the logic of rational belief. (Middletown 1961).
[M] v. Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. (Wien 1928, 1951).
[R] H. Richter: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. (Mathematische Annalen, Bd. 125, 126, 128).
[R′] H. Richter: Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Berlin 1956).