DIE LÖSUNG DES RABENPARADOXONS VON HEMPEL |H| IM SYSTEM DER INDUKTIVEN LOGIK VON RUDOLF CARNAP |C| .

von

Jürgen Humburg

(1) Die Lösung des Hempel'schen Rabenparadoxons von Gaifman |G| , an die diese Arbeit anschließt, ist insofern unbefriedigend, als eine assymetrische Lösung entsteht, die die Symmetrie zwischen einer Implikation und deren Kontraposition nicht widerspiegelt. Außerdem kann man grundsätzliche Bedenken gegen die gewisse Willkür haben, die die Benutzung eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs bedeutet.
Es soll deshalb versucht werden, das Rabenparadoxon im System der Induktiven Logik von Carnap, insbesondere mit der Carnap'schen c*-Funktion zu lösen. Die entscheidende Idee stammt dabei aus der Arbeit von Gaifman, nämlich in die Prämisse der abzuleitenden Wahrscheinlichkeitsaussagen den Gesichtspunkt aufzunehmen, daß das Verhältnis der Raben zu den nichtschwarzen Dingen in unserer Welt sehr klein ist. Wie schon im ersten Absatz bemerkt, ist dabei an der Lösung von Gaifman unbefriedigend, daß die Wahrscheinlichkeit der Aussage , daß alle Raben schwarz sind unter der Voraussetzung, daß alle n bis jetzt beobachteten Raben schwarz waren, gar nicht von diesem Verhältnis abhängt, sondern von diesem Verhältnis nur die zu vergleichende Relation betroffen ist, nämlich daß alle Raben schwarz sind unter der Voraussetzung, daß die ersten n bislang beobachteten nichtschwarzen Dinge Nichtraben waren.
Die folgende Arbeit zeigt, wie im System von Carnap unter Benutzung der grundlegenden Idee der Gaifman'schen Arbeit eine befriedigende, insbesondere symmetrische Lösung des Paradoxons entsteht.

(2) Wir gehen von dem folgenden Sprachsystem L mit den vier eine vollständige logische Disjunktion bildenden Prädikaten A , B , C , D aus; dabei soll bedeuten:

$Ax = (R \wedge S)x$: x ist Rabe und schwarz;
$Bx = (R \wedge \neg S)x$: x ist Rabe und nicht schwarz;
$Cx = (\neg R \wedge S)x$: x ist kein Rabe und schwarz;
$Dx = (\neg R \wedge \neg S)x$: x ist kein Rabe und nicht schwarz.

(3) Als induktive Methode setzen wir die Funktion c_λ an für die oben gegebene Familie von vier eine logische Disjunktion bildenden Prädikate; insbesondere erhalten wir für $\lambda = 4$ die Funktion c^* , die wir später speziell studieren wollen.

(4) Entgegen dem Vorgehen von Gaifman nehmen wir in Anlehnung an Carnap den Standpunkt ein, daß wir nicht die generelle Hypothese $\forall x(Rx \rightarrow Sx)$ betrachten, sondern daß wir die Allaussage durch die Aussage $Ra \rightarrow Sa$ ersetzen, wobei a das nächste von uns zu beobachtende Individuum darstellt.

(5) $Ra \rightarrow Sa$ ist nach obiger Festsetzung (2) äquivalent zu der Aussage $\neg Ba$, denn
$\neg Ra \vee Sa \equiv \neg(Ra \wedge \neg Sa) \equiv \neg Ba$.

(6) Die zu betrachtende Wahrscheinlichkeitsaussage lautet also $c_\lambda(\neg Ba,e)$, wobei e das jeweilige Erfahrungswissen darstellt und insbesondere gilt, daß in der Prämisse e das Individuum a nicht erwähnt wird.
Der Einfachheit halber untersuchen wir im folgenden anstelle der Relation $c_\lambda(\neg Ba,e)$ die Relation $c_\lambda(Ba,e)$; bekanntlich gilt: $c_\lambda(\neg Ba,e) = 1 - c_\lambda(Ba,e)$.
Sei etwa e die folgende Konjunktion:
$e = Aa_1 \wedge \ldots \wedge Aa_m \wedge Da'_1 \wedge \ldots \wedge Da'_s \wedge Ca''_1 \wedge \ldots \wedge Ca''_r \wedge Ba'''_1 \wedge \ldots \wedge Ba'''_t$;
mit $m + s + r + t = n$. Dann gilt für $a \neq a_i, a'_i, a''_i, a'''_i$ nach |C| (Axiom der Voraussageirrelevanz, Seite 246 ,249):
$c_\lambda(Ba,e) = (t + \frac{\lambda}{4})/(n+\lambda)$.

Daraus folgt insbesondere:
$c_\lambda(Ba, Aa_1 \wedge \ldots \wedge Aa_n) = \frac{\lambda}{4}/(n+\lambda) \doteq c_\lambda(Ba, Da_1 \wedge \ldots \wedge Da_n)$.
Insbesondere in dieser Gleichung aber auch schon in der vorangehenden haben wir das Hempel'sche Rabenparadoxon im System von Carnap. Die obige Gleichung besagt nämlich, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der nächste Beobachtungsgegenstand, wenn er ein Rabe ist, auch schwarz ist, gleich groß ist für die Fälle, daß n schwarze Raben beobachtet werden, bzw. n nicht schwarze Nichtraben. Allgemeiner sagt die zuerst angegebene Relation aus, daß die Wahrscheinlichkeit für Ba nur davon abhängt, wie oft Fälle von B bzw. $\neg B$ beobachtet wurden; wie sich die Fälle von $\neg B$ auf A, D, C verteilen, ist dabei völlig gleichgültig.

(7) Die Auflösung des Paradoxons soll nun in Anlehnung an die Arbeit von Gaifman dadurch erfolgen, daß wir glauben mehr zu wissen als in einer Prämisse der oben angegebenen Gestalt e ausdückbar ist. Wir glauben nämlich zu wissen, daß im gesamten von uns erforschbaren Universum, - sein Größe sei N -, die Zahl der Raben gering ist im Verhältnis zu den nichtschwarzen Dingen; diese Prämisse drücken wir symbolisch wie folgt aus: $R/\neg S \leq \delta$; δ soll dabei ein kleine Zahl sein; noch kürzer symbolisieren wir diese Prämisse auch einfach mit e_o .
Das Paradoxon erscheint dabei als gelöst, wenn etwa gilt:
$c_\lambda(Ba, Aa_1 \wedge e_o) < c_\lambda(Ba, Da_1 \wedge e_o)$.
Es gilt also, diese Ausdrücke zu berechnen!

(8) Zunächst wollen wir uns überlegen, wie sich die Prämisse e_o im Sprachsystem L mit den vier logisch disjunkten Prädikaten A,...,D und den Individuen $a_1,\ldots,a_N$ darstellen läßt.
Sei $z(NA,\ldots,ND)$ eine Zustandsbeschreibung in L , die den Prädikaten A,...,D die Anzahlen NA,...,ND zuweist, etwa: $Aa_1 \wedge \ldots \wedge Aa_{NA} \wedge Ba_{NA+1} \wedge \ldots \wedge Ba_{NA+NB} \wedge \ldots \ldots \wedge Da_N$.
Dann stellt die folgende Disjunktion die Aussage e_o dar:

$$e_o = R/\neg S \leq \delta = \bigvee_{\frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta} z(NA,\ldots,ND)$$

Sei etwa $\delta = 0.5$, $N=2$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} R/\neg S \leq \delta = {} & \cancel{Aa_1 \wedge Aa_2} \vee \cancel{Aa_1 \wedge Ba_2} \vee \cancel{Aa_1 \wedge Ca_2} \vee \cancel{Aa_1 \wedge Da_2} \\ & \cancel{Ba_1 \wedge Aa_2} \vee \cancel{Ba_1 \wedge Ba_2} \vee \cancel{Ba_1 \wedge Ca_2} \vee Ba_1 \wedge Da_2 \\ & \cancel{Ca_1 \wedge Aa_2} \vee \cancel{Ca_1 \wedge Ba_2} \vee \cancel{Ca_1 \wedge Ca_2} \vee Ca_1 \wedge Da_2 \\ & \cancel{Da_1 \wedge Aa_2} \vee Da_1 \wedge Ba_2 \vee Da_1 \wedge Ca_2 \vee Da_1 \wedge Da_2 \end{aligned}$$

(9) Der Einfachheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt statt c_λ, m_λ kurz c , m .

Zur Berechnung der Ausdrücke von (7) gebrauchen wir zunächst den Multiplikationssatz, der ergibt:
$c(Ba, Aa_1 \wedge e_o) = m(Ba \wedge Aa_1 \wedge e_o)/m(Aa_1 \wedge e_o)$; analog für $c(Ba, Da_1 \wedge e_o)$.
Gemäß Voraussetzung haben wir das Individuum a_1 beobachtet und bei ihm die Eigenschaft A (bzw. D) festgestellt. Das nächste zu beobachtende Individuum a sei also das Individuum a_2 , - die Individuen seien in der Reihenfolge ihrer Beobachtung nummeriert.
Dann gilt etwa für $m(Ba_2 \wedge Aa_1 \wedge e_o)$:

$$Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge e_o = Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge \Big(\bigvee_{\substack{\frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta \\ P^i = A,B,C,D}} P^{i_1} a_1 \wedge \ldots \wedge P^{i_N} a_N \Big)$$

$$= \bigvee_{\substack{\frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta \\ P^i = A,B,C,D}} Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge P^{i_3} a_3 \wedge \ldots \wedge P^{i_N} a_N \; .$$

Die Zahlen $NA,\ldots,ND$ geben dabei an ,wie oft die Prädikate $A,\ldots,D$ in der obigen Zustandsbeschreibung vorkommen; P^i symbolisiert jeweils eins der Prädikate $A,\ldots,D$.

Die Anzahl der Zustandsbeschreibungen der Gestalt $Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge P^{i_3} a_3 \wedge \ldots \wedge P^{i_N} a_N$ mit den Anzahlen $NA,\ldots,ND$ ist:
$(N-2)!/((NA-1)!(NB-1)!NC!ND!)$.

Damit ergibt sich:

$$m(Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge e_o) = \sum_{\substack{NA\geq 1, NB\geq 1, NC\geq 0, ND\geq 0 \\ NA+\ldots+ND = N \\ \frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta}} \frac{m(z(NA,\ldots,ND)).(N-2)!}{(NA-1)!(NB-1)!NC!ND!}$$

$m(z(NA,\ldots,ND))$ ist dabei die Nullbestätigung der Zustandsbeschreibung $z(NA,\ldots,ND)$, also

$$m_\lambda(z(NA,\ldots,ND)) = \frac{\prod_{I=A,B,C,D} \lambda/4(\lambda/4+1)(\lambda/4+2)\ldots(\lambda/4+NI-1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+N-1)}$$

(10) Für $\lambda=4$ ergeben sich die Funktionen m^*, c^*; in diesem Fall gilt:

$$m^*(Aa_1 \wedge Ba_2 \wedge e_o) = \sum_{\substack{NA\geq 1, NB\geq 1, NC\geq 0, ND\geq 0 \\ NA+\ldots+ND=N \\ \frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta}} \frac{NA!NB!NC!ND!(N-2)!}{(N+3)\ldots 4NC!ND!(NA-1)!(NB-1)!}$$

$$= \sum_{\substack{NA\geq 1, NB\geq 1, ND\geq 0 \\ NA+NB+ND \leq N \\ \frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta}} \frac{NA.NB.3!}{(N-1)\ldots(N+3)} = \sum_{\substack{NA\geq 0, NB\geq 0, ND\geq 0 \\ NA+NB+ND \leq N \\ \frac{NA+NB}{NB+ND} \leq \delta}} \frac{\text{gleicher}}{\text{Ausdruck}}$$

(11) Analog ergibt sich:

$$m^*(Aa_1 \wedge e_o) = \sum_{\text{Summationsbedingung wie oben}} \frac{NA.3!}{N\ldots(N+3)}$$

$$m^*(Da_1 \wedge Ba_2 \wedge e_o) = \sum_{\text{Summationsbedingung wie oben}} \frac{ND.NB.3!}{(N-1)\ldots(N+3)}$$

$$m^*(Da_1 \wedge e_o) = \sum_{\text{Summationsbedingung wie oben}} \frac{ND.3!}{N\ldots(N+3)}.$$

Eine Summe mit der obigen Summationsbedingung bezeichnen wir in Zukunft mit Σ^* .

(12) Da wir uns außerdem noch für die Wahrscheinlichkeit

$$c^*(Ba_2, e_o) = \frac{m^*(Ba_2 \wedge e_o)}{m^*(e_o)}$$ interessieren, geben wir

noch die beiden folgenden Ausdrücke an:

$$m^*(Ba_2 \wedge e_o) = \Sigma^* \frac{NB.3!}{N\ldots(N+3)}$$

$$m^*(e_o) = \Sigma^* \frac{3!}{(N+1)\ldots(N+3)} .$$

(13) Damit ergeben sich für die von uns gesuchten Ausdrücke die folgenden Darstellungen:

$$c^*(Ba_2, e_o) = \frac{\Sigma^* \; NB}{\Sigma^* \; N}$$

$$c^*(Ba_2, e_o \wedge Aa_1) = \frac{\Sigma^* \; NA.NB}{\Sigma^* \; NA(N-1)}$$

$$c^*(Ba_2, e_o \wedge Da_1) = \frac{\Sigma^* \; ND.NB}{\Sigma^* \; ND(N-1)} .$$

(14)

Eine analytische Ausrechnung der obigen Summen soll hier nicht versucht werden, da sich die obigen Werte sehr leicht mit hilfe des folgenden einfachen Computerprogramms berechnen lassen:

(15) Programm zur Berechnung der Ausdrücke (13) :

```
VAR N,A,B,D:INTEGER;
    WO,WO1,WO2,WA,WA1,WA2,WD,WD1,WD2,W,DELTA: REAL;
BEGIN
READ(N,DELTA); WRITELN('N=',N);WRITELN('DELTA=',DELTA);
WO1:=0;WO2:=0;WA1:=0;WA2:=0;WD1:=0;WD2:=0;W:=0;
FOR D:=0 TO N DO
FOR A:=0 TO N-D  DO
FOR B:=0 TO N-D-A DO
BEGIN
IF D+B<>0 THEN IF (A+B)/(D+B)<=DELTA THEN
     BEGIN
     WD1:=WD1+B*D; WD2:=WD2+D; WA1:=WA1+B*A;
     WA2:=WA2+A;WO1:=WO1+B;WO2:=WO2+1;
     END;
W:=W+B;
END;
WA:=WA1/WA2/(N-1);WD:=WD1/WD2/(N-1);WO:=WO1/WO2/N;
W:=6*W/(N*(N+1)*(N+2)*(N+3));
```

(*KOMMENTAR: WA = $c*(Ba_2, e_o \wedge Aa_1)$; WD=$c*(Ba_2, e_o \wedge Da_1)$
WO:=$c*(Ba_2, e_o)$; W=$m*(Ba_2)$.*)

```
WRITELN('WA=',WA);WRITELN('WD=',WD);WRITELN('WO=',WO);
WRITELN('BA=',WO-WA);WRITELN('BD=',WO-WD);
WRITELN('BA/BD=',(WO-WA)/(WO-WD));
WRITELN('D=',2*(WD-WA)/(WA+WD));

WRITELN('FEHLER=',W-0.25);(*Die mögliche Abweichung des
Werts  W  von  0.25 stellt ein Maß für die bei der obigen
Summenbildung möglicher weise auftretenden Rundungsfehler dar*)
END.
```

(16) Rechenwerte

WO=$c^*(Ba_2,e_o)$; WA= $c^*(Ba_2,e_o \wedge Aa_1)$; WD= $c^*(Ba_2,e_o \wedge Da_1)$; BA=WO-WA ; BD=WO-WD ; D= $\frac{WD-WA}{WD+WA} \cdot 2$

	N=20 ,Delta=0.7	N=20 , Delta=0.5	N=20 ,Delta=0.3	N=20,Delta=0.2
WA	0.1291627272	0.08931419458	0.04448217317	0.02267206478
WD	0.1640672046	0.1258009749	0.07449871599	0.04747651118
WO	0.1716911765	0.1224089636	0.06807228916	0.042
BA	0.04252844929	0.03309476901	0.02359011598	0.01932793522
BD	0.007623971846	-0.003392011276	-0.00642642683	-0.005476511183
BA/BD	5.578253717	-9.756680128	-3.670798191	-3.529242354
D	0.2380689941	0.3392301936	0.5045607412	0.7071974325
Fehler	0	0	0	0

	N=35,Delta=0.7	N=35,Delta=0.5	N=35,Delta=0.3	N=35,Delta=0.2	N=35,Delta=0.1
WA	0.1344143846	0.0940506	0.05147058824	0.03109243697	0.01078431373
WD	0.1634432403	0.1244907662	0.07528371602	0.04973772949	0.0231713555
WO	0.1732587697	0.1233092224	0.07068094565	0.04540816327	0.02013422819
BA	0.0388443851	0.02925862242	0.01921035741	0.01431572629	0.009349914463
BD	0.00981552943	-0.001181543799	-0.004602770375	-0.004329566221	-0.003037127311
BA/BD	3.957441662	-24.76304513	-4.17365105	-3.306503598	-3.078538864
D	0.1949176603	0.278575784	0.3757367913	0.4613448995	0.7296008034
Fehler	0	0	0	0	0

	N=50, Delta=0.6	N=50, Delta=0.5	N=50, Delta=0.3	N=50, Delta=0.2	N=50, Delta=0.1
WA	0.1158507956	0.09587766731	0.05388167388	0.03355036385	0.01262755102
WD	0.1444178894	0.1240615279	0.07571783375	0.05037751388	0.02329858223
WO	0.1485264301	0.1238003296	0.0718521697	0.04666666667	0.02086956522
BA	0.03267563454	0.02792266234	0.01797654309	0.01311630282	0.008242014197
BD	0.004108540753	$-2.61198233 \cdot 10^{-4}$	-0.003859616777	-0.003710847209	-0.002429017008
BA/BD	7.953099776	-106.902187	-4.65797924	-3.534584445	-3.393147997
D	0.2195200225	0.2562877485	0.336979056	0.4009907194	0.5940539791
Fehler	0	0	0	0	0

	N=100, Delta=0.5	N=100, Delta=0.4	N=100, Delta=0.2	N=100, Delta=0.1
WA	0.09796648732	0.07737334306	0.03680993785	0.01647241647
WD	0.123550034	0.1005678973	0.05125972181	0.02493392696
WO	0.124382836	0.09876769672	0.04829850746	0.02294258373
BA	0.026413490	0.02139435366	0.01148856961	$6.47016726 \cdot 10^{-3}$
BD	$8.278329389 \cdot 10^{-4}$	$-1.80020061 \cdot 10^{-3}$	$-2.96121435 \cdot 10^{-3}$	$-1.9913432 \cdot 10^{-3}$
BA/BD	31.9102415	-0.1188442752	-3.8796818668	-3.249147197
D	0.23102513454	0.2606990288	0.328144426	0.408705999
Fehler	0	0	0	0

	N=200, Delta=0.5	N=200, Delta=0.4	N=200, Delta=0.2	N=200, Delta=0.1
WA	0.09899185307	0.07869297351	0.03839996168	0.01821197278
WD	0.1233132956	0.1006508614	0.05169746541	0.02567183062
WO	0.1246889632	0.09937880989	0.04913641848	0.02395885722
BA	0.02569711015	0.0206858364	0.0107364568	$5.74688444 \cdot 10^{-3}$
BD	$1.37566767 \cdot 10^{-3}$	$-1.272052 \cdot 10^{-3}$	$-2.561047 \cdot 10^{-3}$	$-1.7129734 \cdot 10^{-3}$
BA/BD	18.679737	-16.2617911	-4.1922140013	-3.354917507
D	0.218811329	0.244869169	0.2951805432	0.3399822833
Fehler	0	0	0	0

N=500

Delta	0.5	0.4	0.3	0.1	0.09
WA	0.099498	0.079434	0.05939	0.01927	0.017258
WD	0.12306	0.10065	0.076863	0.026092	0.023462
WO	0.12475	0.099696	0.074664	0.024561	0.022051
BA	0.025253	0.020262	0.015274	$0.52909.10^{-2}$	$0.47928.10^{-2}$
BD	$0.16909.10^{-2}$	$-0.95535.10^{-3}$	$-0.21995.10^{-2}$	$-0.15314.10^{-2}$	$-0.14106.10^{-2}$
BA/BD	14.935	-21.209	-6.9443	-3.4550	-3.3976
D	0.21174	0.23564	0.25648	0.30079	0.30469
Fehler	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$

Delta	0.07	0.05	0.03	0.01
WA	0.013249	$0.92478.10^{-2}$	$0.52246.10^{-2}$	$0.12059.10^{-2}$
WD	0.018197	0.012914	$0.75846.10^{-2}$	$0.22389.10^{-2}$
WO	0.017043	0.012039	$0.70191.10^{-2}$	$0.20086.10^{-2}$
BA	$0.37944.10^{-2}$	$0.27917.10^{-2}$	$0.17945.10^{-2}$	$0.80271.10^{-3}$
BD	$-0.11535.10^{-2}$	$-0.87442.10^{-3}$	$-0.56546.10^{-3}$	$-0.23035.10^{-3}$
BA/BD	-3.2894	-3.1926	-3.1736	-3.4848
D	0.31470	0.33085	0.36848	0.59978
Fehler	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$	$0.17764.10^{-14}$

N = 1000

Delta	0.5	0.4	0.1	0.09	0.05	0.01
WA	0.099739	0.079715	0.019630	0.017627	$0.96186.10^{-2}$	$0.16033.10^{-2}$
WD	0.12305	0.10069	0.026244	0.023625	0.013090	$0.24548.10^{-2}$
WO	0.12486	0.099845	0.024775	0.022273	0.012266	$0.22532.10^{-2}$
BA	0.025123	0.020130	$0.51452.10^{-2}$	$0.46463.10^{-2}$	$0.26475.10^{-2}$	$0.64987.10^{-3}$
BD	0.0018073	$-0.84813.10^{-3}$	$-0.14692.10^{-2}$	$-0.13518.10^{-2}$	$-0.82366.10^{-3}$	$-0.20157.10^{-3}$
BA/BD	13.900	-23.735	-3.5020	-3.4371	-3.2143	3.2241
D	0.20930	0.23257	0.28837	0.29081	0.30572	0.41963
Fehler	0	0	0	0	0	0

Delta	0.009	0.007	0.005	0.003
WA	$0.14037.10^{-2}$	$0.10018.10^{-2}$	$0.60146.10^{-3}$	$0.20044.10^{-3}$
WD	$0.21883.10^{-2}$	$0.16522.10^{-2}$	$0.11169.10^{-2}$	$0.57682.10^{-3}$
WO	$0.20037.10^{-2}$	$0.15018.10^{-2}$	$0.10021.10^{-2}$	$0.50135.10^{-3}$
BA	$0.59995.10^{-3}$	$0.49997.10^{-3}$	$0.40068.10^{-3}$	$0.30091.10^{-3}$
BD	$-0.18462.10^{-3}$	$-0.15040.10^{-3}$	$-0.11473.10^{-3}$	$-0.75472.10^{-4}$
BA/BD	-3.2497	-3.3243	-3.4923	-3.9870
D	0.43684	0.49012	0.59990	0.96848
Fehler	0	0	0	0

N = 1000

Delta	0.5	0.4	0.1	0.09	0.05	0.01
WA	0.099739	0.079715	0.019630	0.017627	$0.96186.10^{-2}$	$0.16033.10^{-2}$
WD	0.12305	0.10069	0.026244	0.023625	0.013090	$0.24548.10^{-2}$
WO	0.12486	0.099845	0.024775	0.022273	0.012266	$0.22532.10^{-2}$
BA	0.025123	0.020130	$0.51452.10^{-2}$	$0.46463.10^{-2}$	$0.26475.10^{-2}$	$0.64987.10^{-3}$
BD	0.0018073	$-0.84813.10^{-3}$	$-0.14692.10^{-2}$	$-0.13518.10^{-2}$	$-0.82366.10^{-3}$	$-0.20157.10^{-3}$
BA/BD	13.900	-23.735	-3.5020	-3.4371	-3.2143	3.2241
D	0.20930	0.23257	0.28837	0.29081	0.30572	0.41963
Fehler	0	0	0	0	0	0

Delta	0.009	0.007	0.005	0.003
WA	$0.14037.10^{-2}$	$0.10018.10^{-2}$	$0.60146.10^{-3}$	$0.20044.10^{-3}$
WD	$0.21883.10^{-2}$	$0.16522.10^{-2}$	$0.11169.10^{-2}$	$0.57682.10^{-3}$
WO	$0.20037.10^{-2}$	$0.15018.10^{-2}$	$0.10021.10^{-2}$	$0.50135.10^{-3}$
BA	$0.59995.10^{-3}$	$0.49997.10^{-3}$	$0.40068.10^{-3}$	$0.30091.10^{-3}$
BD	$-0.18462.10^{-3}$	$-0.15040.10^{-3}$	$-0.11473.10^{-3}$	$-0.75472.10^{-4}$
BA/BD	-3.2497	-3.3243	-3.4923	-3.9870
D	0.43684	0.49012	0.59990	0.96848
Fehler	0	0	0	0

(17) Wie die unter (16) angegebenen Werte zeigen, ist das Paradoxon hiermit für die berechneten Werte gelöst; die Ungleichung $WA < WD$ ist nämlich deutlich erfüllt. Wie die oben stehenden Werte zeigen, nimmt die normierte Distanz zwischen WA und WD mit dem abnehmenden Wert Delta zu.
Da die Rechenzeit mit N^3 wächst ist mit $N=1000$ ungefähr die Grenze dessen erreicht, was sich aus Gründen der Rechenzeit noch auf einem Rechner realisieren läßt.
Eine vollständige Lösung des Paradoxons ließe sich natürlich nur durch analytische Berechnung der obigen Summen erbringen; aber ich denke, es ist bereits mit den obigen Werten plausibel gemacht, daß sich das Paradoxon im System von Carnap auflöst.

(18) Wie ein Blick in das Programm zeigt, ist die obige Lösung, wie unter (1) angekündigt, symmetrisch, dh. ändert man die Bedingung $\frac{A+B}{B+D} < \delta$ in $\frac{B+D}{A+B} < \delta$, so entstehen die spiegelbildlichen Werte für WA und WD .

(19) Die obigen Ergebnisse stellen tatsächlich die Lösung des Paradoxons dar, wie man auch intuitiv einsieht: Ob die bestätigenden Instanzen der ursprünglichen Implikation oder ihrer Kontraposition das stärkere Gewicht haben, hängt nämlich, wie das folgende Beispiel illustriert, tatsächlich von dem Wert des Verhältnisses $R/\neg S$ ab:
Betrachten wir etwa den folgenden Satz:

$$\forall x(\ x\ \underbrace{\text{ist ein Laubbaum}}_{R} \rightarrow x\ \underbrace{\text{ist kleiner als 200 Fuß}}_{S})$$

Setzt man voraus, daß das Verhältnis der Bäume größer als 200 Fuß gering ist verglichen mit allen Laubbäumen, also $\neg S/R<\delta$, so wird man diese Implikation durch den Nachweis bestätigen, daß die auftretenden Bäume größer als 200 Fuß Nadelbäume sind und nicht durch die Feststellung , daß beobachtete Laubbäume kleiner als 200 Fuß sind.

(20) Abschließend sei noch bemerkt, daß man natürlich versuchen kann, das obige Paradoxon in den allgemeineren Systemen von Carnap , siehe |C'| , |C''|, zu untersuchen, wo man dann zwischen den Prädikatenfamilien {R , ¬R} und {S , ¬S} zu unterscheiden hätte und zusätzlich zu dem Parameter λ den Analogieparameter η zwischen den beiden Familien zu berücksichtigen hätte; dies soll aber in dieser Arbeit nicht versucht werden, besonders da das Paradoxon ja schon als gelöst erscheint.

(21) Zu den Voraussetzungen, unter denen das Carnap'sche System der c_λ-Funktionen steht, ist vor allem das Axiom der Symmetrie der Individuen zu erwähnen. Diese Voraussetzung ist sicher als etwas idealisiert anzusehen, da sie eben bedeutet , daß die Reihenfolge der Beobachtung der Individuen keine Rolle spielt.
Wollte man sich von dieser Voraussetzung frei machen, was hier ebenfalls nicht versucht wird, so müßte man das von Carnap in |C''| skizzierte System von Wahrscheinlichkeitsfunktionen betrachten, wo ein Proximitätseinfluß zwischen den Individuen besteht. Diese Untersuchung dürfte allerdings sehr schwierig ,um nicht zu sagen, beim augenblicklichen Stand der Forschung unmöglich sein.

(22) Bemerkung
Bei der vorliegenden Arbeit danke ich für ihre Unterstützung Herrn Werner von Zeppelin, Herrn Diplom-Physiker Gerhard Zoubek, Herrn Bruno Fuchs und Frau Diplom-Chemikerin Angelika Ruh.

LITERATURVERZEICHNIS

ALEXANDER, H.G: The Paradoxes of Confirmation. (British Journal for the Philosophy of Science, 9, 1958/59)

|C| CARNAP, R. ; STEGMÜLLER, W. : Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. (Wien 1958)

|C'| CARNAP, R. ; JEFFREY, C.R. : Studies in Inductive Logic and Probability. Volume I. (Berkely, Los Angeles, London 1971)

|C''| JEFFREY, C.R.: Studies in Inductive Logic and Probability. Volume II. (Berkely, Los Angeles, 1980)

|G| GAIFMAN, H.: Subjective probability, natural predicates and Hempel's ravens. (Erkenntnis 14 (1979) 105-147)

|H| HEMPEL: Studies in the Logic of Confirmation. (Mind, 1945, 54, 1-26, 97-121)