Wilhelm K. Essler

Über die Interpretation von Wissenschaftssprachen

„Philosophisches Jahrbuch“
77 (1970), S.117-130
Unveränderter Nachdruck 2016

Neues Vorwort
Zum Verhältnis von Frege und Hilbert

Der –allzu kurze– Briefwechsel zwischen Frege und Hilbert ist meinem Lehrer Stegmüller –und dann auch mir– Mitte der 60-er Jahre durch Hermes zugänglich gemacht worden. In den Jahren danach wurde mir stückweise dann dieses mehr und mehr klar:

- Bis vor Leibniz und Newton hatte die griechisch-lateinische Welt in der Mathematik –und speziell in der Differential- und Integralrechnung– noch nicht den Stand der Babylonier und der Chaldäer erreicht.
- Bis weit ins 19-te Jahrhundert hinein wurde kein Versuch unternommen, die Arithmetik axiomatisch darzustellen oder zumindest die von Eukleídẹs von Alexandrien unvollständig erstellte Axiomatik der Geometrie zu vervollständigen.
- Mit der Erstellung der nichteuklidischen Geometrien –in Ansätzen durch Bolyai und Lobatschewski sowie sodann durch Gauß und insbesondere durch dessen Schüler Riemann– hat die Mathematik –zumindest unter den Großen dieser Disziplin– eine Entwicklung genommen, die dem Endspurt aus dem Startloch gleicht: Nicht mehr –wie bei Plátọn und bei Aristotélẹs– die vorab zu erstellende Begriffe bestimmen die Axiome, sondern –wie in der brahmanischen Sprachphilosophie Alt-Indiens– die Theorie bestimmt die ihr eigenen Begriffe.[1]
- Hilbert war die Krönung dieser neuen –und bis jetzt bleibenden– Entwicklung, Frege hingegen die Krönung und der Abschluss der Deutung der Mathematik im Sinne Alt-Griechenlands. Dass diese beiden Großen nicht [mehr] die gleiche Sprache sprachen, sondern vielmehr aneinander vorbeiredeten, das ist –nachträglich gesehen– nicht erstaunlich.

In meiner sich an die Habilitation 1968 anschließenden öffentlichen Probevorlesung hab‘ ich die genauso kurze wie auch heftige Kontroverse Frege’s mit Hilbert zu analysieren versucht. Dieser Text ist bald danach von einer für mich unerwarteten Seite zu publizieren erbeten und dort publiziert worden: „Philosophisches Jahrbuch“ 77 (1970), S. 117-130.

Goethe-Universität, Frankfurt am Main
30 Oktober 2016

Wilhelm K. Essler

[1] In den Brāhmaṇa-Texten heißt es: „Die Rede bestimmt den Begriff“.

Über die Interpretation von Wissenschaftssprachen

Von WILHELM KARL ESSLER (München)

Das Thema dieser Untersuchung legt ganz zwanglos die folgenden Fragen nahe: „Was ist eine Wissenschaftssprache?“, „Was sind Interpretationen von Wissenschaftssprachen?“ und „Worin liegt der Nutzen dieser Trennung von Interpretation und Sprache?“ Ich möchte versuchen, diese Fragen im folgenden zu beantworten.

Die Antwort auf die erste Frage „Was ist eine Wissenschaftssprache?“ wird nicht in einer Definition dieses Begriffs bestehen können. Nicht, daß es unmöglich wäre, eine Definition für ihn vorzuschlagen; aber es läßt sich wohl stets zeigen, daß sie zu eng oder zu weit ist, daß sie den Begriff also nicht adäquat charakterisiert. Man kann vielleicht durch Aufzählung feststellen, was *heute* als Wissenschaft gilt, aber das ist noch keine Definition dieses Begriffs; und es dürfte ausgeschlossen sein, jene Dinge, die sprachliche Zeichen sind, von denen zu unterscheiden, die nicht Träger einer Bedeutung sind. Hätte man den Begriff der Bedeutung eines Zeichens schon zur Verfügung, so wäre es vielleicht möglich, ein solches Unterscheidungskriterium zu formulieren; aber es wird wohl nicht möglich sein, ihn unabhängig vom Begriff des Zeichens adäquat zu charakterisieren. Ob ein abgeknickter Zweig oder ein versetzter Stein auf einem Indianerpfad eine Bedeutung hat und bestimmten Personen etwas aussagt oder ob dies nicht der Fall ist, mag für die Helden der Wildwestgeschichten ein leicht zu entscheidendes Problem sein, für den Wissenschaftler, der versuchen möchte, dieses Geschick in Regeln zu fassen, ist es das nicht.

Wenn man das Problem, was eine Sprache ist und was nicht, durch Aufzählung aller uns bekannten Sprachen zu lösen sucht, so scheint es auf den ersten Blick auch nicht schwierig zu sein, den Begriff der Wissenschaftssprache zu charakterisieren. Man wird ihn von dem der Alltagssprache dadurch abgrenzen, daß man auf die Eindeutigkeit oder Mehrdeutigkeit der Begriffe hinweist und etwa folgende Definition vorschlägt: Eine Wissenschaftssprache ist ein System von Sätzen, deren Begriffe scharf umrissen und eindeutig sind, im Gegensatz zur Alltagsprache, deren Aussagen immer vage und mehrdeutige Begriffe enthalten.

Obwohl diese Definition auf der Hand zu liegen scheint, führt sie doch zu absurden Konsequenzen, die es geraten erscheinen lassen, auf sie zu verzichten. Die Relativitätstheorie Einsteins etwa war vor ihrer Analyse durch Hans Reichenbach[1] alles andere als ein System von Sätzen, das auf scharf umrissenen und unzweideutigen Begriffen aufgebaut ist, und von der Quantenmechanik gilt dies noch heute, was man auch daraus ersehen kann, daß immer noch darum gestritten wird, ob die sogenannte Kopenhagener Interpretation dieser Theorie aus der

---

[1] Hans Reichenbach, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre,* Braunschweig 1924, ²1965.

Theorie folgt oder nicht, ob sie physikalische Konsequenzen hat oder nicht und ob sie überhaupt adäquat ist oder ob dies nicht der Fall ist. Die Sprachen der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie vor Reichenbach müßten nach der obigen Definition demnach als Alltagssprachen und nicht als Wissenschaftssprachen angesehen werden. Andererseits zeichnet sich etwa die Sprache, in der Wulfila die Bibel übersetzt hat, durch einfache, klare, eindeutige und unmißverständliche Begriffe aus und müßte demnach als eine Wissenschaftssprache angesehen werden, während die Skeireins wiederum, die die Aussagen eben dieser Übersetzung klären will und vermutlich die Sprache der Fachtheologen jener Zeit wiedergibt, zu den unverständlichsten Kapiteln der abendländischen Theologie gehört und nach der obigen Definition deshalb der Alltagssprache zuzurechnen ist. Diese Konsequenzen, die unserem unreflektierten Verständnis der Begriffe „Wissenschaftssprache" und „Alltagssprache" völlig zuwiderlaufen, legen es nahe, auf jenen Definitionsvorschlag ganz zu verzichten und keinen Versuch zu unternehmen, ihn zu verändern und zu verbessern. Statt dessen werde ich versuchen, an einem Beispiel zu zeigen, wie sich eine Wissenschaftssprache aus der Alltagssprache entwickelt. Damit möchte ich gleichzeitig behaupten, daß Alltagssprache und Wissenschaftssprache nicht notwendig Gegensätze sind.

Es scheint eine empirische Tatsache zu sein, daß die Sprachen jener Völker, die mit den Problemen dieser Welt bisher fertigzuwerden versucht haben, ohne über sie philosophisch zu reflektieren, hinreichend klar und eindeutig sind, so daß Mißverständnisse bezüglich des Sinnes ihrer Aussagen in keinem nennenswerten Umfang vorkommen. Derartige Mißverständnisse treten fast immer erst dann auf, wenn Philosophen oder Theologen Probleme sehen oder ahnen oder zu sehen glauben, die sie in der Sprache ihres Kulturkreises nicht adäquat formulieren können, so daß sie die Begriffe der Sprache samt ihren Bedeutungen als Symbole für andere Entitäten nehmen, die sie sehen oder zu sehen glauben, oder die sie mit Hilfe dieser Umschreibungen überhaupt erst sichtbar oder erfaßbar machen wollen. Aus den langen Diskussionen dieser Probleme, die ja stets mit neuen Begriffsbildungen und mit einer Erweiterung der Ausdrucksfähigkeit der Sprache, aber auch mit Bedeutungsverschiebungen, Bedeutungsänderungen und Bedeutungsvervielfachungen der alten Begriffe verbunden sind, entstehen dann im Laufe der Zeit im Glücksfall Ansätze zu einer systematischen Sichtung jener Probleme, zur Klärung und Trennung der Probleme und damit auch zur Möglichkeit ihrer pünktlichen Beantwortung.

Nicht immer freilich sind Wissenschaften diesen beschwerlichen Weg gegangen. Der euklidischen Geometrie etwa scheint der Weg über das Gebiet der Begriffsverwirrungen weitgehend erspart geblieben zu sein. Jedoch ist für Euklid offenbar zumindest die Bedeutung des Begriffs „Punkt" nicht mehr selbstverständlich gewesen, weshalb er Punkte als jene Dinge definierte, die keine Teile haben. Wäre das Atom, wie schon der Name sagt, unteilbar, so müßte man es nach dieser Festlegung als Punkt ansehen, und wenn man schließlich unteilbare Elementarteilchen finden sollte, dann wären diese Dinge zwar räumlich ausgedehnt, auf Grund der Definition Euklids aber trotzdem Punkte.

Lange Zeit scheint man der Ansicht gewesen zu sein, daß die Postulate Euklids sämtliche Eigenschaften von Punkten, Geraden und Ebenen und alle Relationen zwischen ihnen bestimmen. Vermutlich hat Peletarius 1557 als erster bemerkt, daß dieses System unvollständig ist, da Euklid beim Beweis der 4. Proposition des I. Buches stillschweigend weitere Voraussetzungen machen muß, indem er starre Figuren als Ganzes bewegt und miteinander vergleicht. Diese und ähnliche Zusatzvoraussetzungen hat David Hilbert 1899 zu den Axiomen der Kongruenz zusammengefaßt[2].

Um ein vollständiges System der euklidischen Postulate zu erhalten, hat Hilbert angenommen, daß die Grundbegriffe seines Systems, die Ausdrücke „Punkt", „Gerade", „Ebene", „liegt zwischen", „liegt auf" und „liegt in" genau *die* Intensionen haben, die durch seine Axiome beschrieben werden. Zum Beweis der Theoreme hat er nur jene Sätze benützt, die er explizit als Axiome angegeben oder bereits früher aus den Axiomen logisch deduziert hat.

Zur Durchführung seines Zieles hat Hilbert einen strengen Begriff der logischen Folgerung benützt, der sich vielleicht am besten folgendermaßen charakterisieren läßt: Ein Satz Ψ folgt *nicht* logisch aus einem Satz Φ genau dann, wenn Ψ von Φ logisch unabhängig ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Interpretation der in diesen Sätzen vorkommenden (außerlogischen) Begriffe gibt, bei der Φ wahr, Ψ jedoch falsch ist. Diesen Folgerungsbegriff hat er implizit bei der Ableitung der Theoreme aus den Axiomen und explizit beim Beweis der Unabhängigkeit der Axiome voneinander benützt.

Die Verwendung eines solchen Begriffs der logischen Folgerung setzt zweierlei voraus: Einmal, daß klar zwischen logischen Ausdrücken wie „wenn-dann", „nicht", „jedes" und „es gibt" und den außerlogischen unterschieden werden kann (außerlogische Ausdrücke seines Systems sind „Punkt", „Gerade" usw. und die damit definierten Begriffe), sowie, daß es möglich ist, zwischen diesen außerlogischen Ausdrücken und ihrer Bedeutung unter einer gegebenen Interpretation, insbesondere der üblichen Interpretation der Alltagssprache, zu unterscheiden. Ein Ausdruck ist demnach nichts weiter als ein Zeichen der Sprache, seine Bedeutung hingegen jene Entität, die ihm auf Grund der vorgegebenen Interpretation der Sprache zugeordnet ist. Eine Interpretation der Sprache hingegen ist eine Zuordnung von Entitäten zu den außerlogischen Begriffen der Sprache, mathematisch gesprochen also eine Funktion, deren Argumentbereich die Gesamtheit der außerlogischen Ausdrücke ist und deren Werte Gegenstände, Eigenschaften von Gegenständen und Beziehungen zwischen Gegenständen sind, je nach der Stellung, die der betreffende Ausdruck im Satz hat.

Diese Unterscheidung von Ausdrücken und ihren Bedeutungen bei einer gegebenen Interpretation hat Hilbert wohl auch dazu geführt, ein Axiom aufzustellen, an das vor ihm niemand gedacht hat, das in der Geometrie fast nie benützt wird und das auf den ersten Blick aus dem Rahmen zu fallen scheint, da es den Eindruck erweckt, daß es nicht über die geometrischen *Entitäten,* sondern über die anderen geometrischen *Axiome* spricht; ich meine das sogenannte Voll-

[2] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig 1899, Stuttgart [9]1962.

ständigkeitsaxiom, das besagt, daß die in den übrigen Axiomen (mit Ausnahme des Parallelenaxioms) aufgeführten Eigenschaften und Beziehungen nicht erhalten bleiben, wenn das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen erweitert wird[3]. Hilbert hat dazu eine Interpretation der Sprache, in der diese Axiome formuliert sind, angegeben, die einen abzählbar unendlichen Bereich von reellen Zahlen zugrunde legt und bei der die Grundbegriffe „Punkt", „Gerade", „liegt zwischen" usw. gewisse Eigenschaften und Beziehungen über diesen reellen Zahlen bezeichnen; bei dieser Interpretation ist das Vollständigkeitsaxiom falsch, die übrigen Postulate hingegen wahr. Es kann also nicht aus diesen logisch gefolgert werden. Eine andere Interpretation dieser Sprache über den Bereich *aller* reellen Zahlen, die diese Geometrie zu einer analytischen Geometrie im Sinne Descartes' macht, erfüllt auch das Vollständigkeitsaxiom. Dieses Axiom bewirkt, daß die Existenz von gewissen Grenzen, die den sogenannten dedekindschen Schnitten entsprechen, und von bolzanoschen Verdichtungsstellen oder Zwischenklassen beweisbar wird; die Existenz dieser Schnitte und Zwischenklassen bewirkt ihrerseits, daß zwei verschiedene Interpretationen der Sprache, bei der *alle* Axiome wahr sind, von gleicher Struktur sind, genauer: daß sie miteinander *isomorph* sind und daß damit das Axiomensystem *kategorisch* ist. Unter Verwendung eines erweiterten Leibnizprinzips von der Identität des Ununterscheidbaren – sind die Interpretationen der Sprache eines Axiomensystems miteinander isomorph, so machen sie genau die gleichen Sätze dieser Sprache wahr und sind deshalb mit den Mitteln eben dieser Sprache nicht mehr unterscheidbar – kann Hilbert deshalb sagen, daß es nur *eine* cartesische analytische Geometrie gibt, die seinen Axiomen genügt[4].

Die Unterscheidung Hilberts zwischen einem Begriff und seiner Bedeutung bei einer gegebenen Interpretation der Sprache, zu der er gehört, war eine Revolution auf dem Gebiet der logischen und mathematischen Grundlagenforschung, die nur mit der Grundlegung der Logik und der Theorie der natürlichen Zahlen durch Gottlob Frege zu vergleichen ist. Allerdings kann nicht behauptet werden, daß Hilbert diesen Unterschied klar und unmißverständlich formuliert hat. Frege hat diese Schwächen der Formulierung gesehen und seinen von Hilbert verschiedenen Standpunkt in dieser Frage in verschiedenen Aufsätzen und Briefen systematisch entwickelt; leider ist Hilbert darauf nur in einem einzigen Brief (vom 29. XII. 1899)[5] eingegangen, und auch das nicht mit jener Genauigkeit, die Freges Argumente verdient hätten.

Frege hat sich zunächst hauptsächlich an folgenden drei Ausführungen Hilberts gestoßen:

---

[3] Rudolf Carnap und Friedrich Bachmann haben allerdings in dem Aufsatz „Über Extremalaxiome" in *Erkenntnis 6* (1936), S. 166–188, gezeigt, daß auch dieses Axiom über die geometrischen Entitäten spricht, daß in ihm allerdings auch über Eigenschaften und Beziehungen solcher Entitäten und nicht nur über die Entitäten selbst quantifiziert wird.

[4] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* Stuttgart [9]1962, S. 37.

[5] Vgl. Gottlob Frege, *Kleinere Schriften* (hrsg. von Angelelli), Darmstadt 1967, S. 264, Fußnote 7.

1. Obwohl diese axiomatische Grundlegung der Geometrie eine logische Analyse unserer räumlichen Anschauung sein will[6], sind für Hilbert Punkte scheinbar nichts anderes als geordnete Paare von reellen Zahlen.[7] Nach Frege sind Punkte jedoch Punkte und nichts anderes[8].

2. Hilbert gibt Deutungen der Sprache an, in der seine Axiome formuliert sind, die gewisse dieser Postulate erfüllen, und andere Interpretationen, die sie nicht erfüllen, bei denen sie also falsch sind[9]. Nach Frege ist diese Änderung der Interpretation ein unzulässiges Verfahren. Die außerlogischen Begriffe wie „Punkt", „Gerade" usw. haben eine ganz feste Bedeutung, die unzweideutig festgelegt ist und die man nicht willkürlich durch eine andere ersetzen kann; ein Wechsel in der Interpretation eines solchen Ausdrucks ist also nicht möglich[10]. Wenn die außerlogischen Ausdrücke der hilbertschen Postulate ihre Bedeutung haben, dann steht ihr Wahrheitswert eindeutig fest und dann sind sie im Falle der Wahrheit Axiome. Haben diese Begriffe jedoch keine Bedeutung, so haben die Postulate keinen Wahrheitswert und keinen Sinn und können daher keine Axiome sein. Axiome können nach Frege also auf keinen Fall bei bestimmten Interpretationen wahr und bei anderen falsch sein; sie sind immer wahr und die geometrischen Axiome werden auf Grund unserer räumlichen Anschauung als wahr erkannt. Wenn sie jedoch alle wahr sind, dann sind sie auch widerspruchsfrei.[11]

3. Hilbert behauptet an verschiedenen Stellen, daß die geometrischen Axiome oder Gruppen von ihnen die in ihnen vorkommenden Grundbegriffe definieren.[12] Nach Frege ist dies eine willkürliche und unbegründete Verwischung und Änderung der Bedeutung des Begriffs „Definition", die einem ernsthaften Wissenschaftler nicht unterlaufen darf. Definitionen sind ja lediglich Festsetzungen und sagen nichts über die Wirklichkeit aus, im Gegensatz zu den Postulaten Hilberts, die entweder überhaupt nicht Sätze im eigentlichen Sinn oder aber Axiome und jedenfalls keine Definitionen sind.[13]

Hilberts Antwort auf Freges Einwände sind nicht von der Art, die einen strengen Logiker wie Frege zufriedenstellen können. Man kann nach Hilberts Ansicht nicht von der Wahrheit der Axiome ausgehen und daraus deren Widerspruchsfreiheit erschließen, sondern man muß umgekehrt verfahren: „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz."[14] Desgleichen hält er daran fest, daß die Grundbegriffe durch die Axiome definiert werden, der

---

[6] Vgl. Hilbert a.a.O., S. 1 f.
[7] Vgl. Hilbert a.a.O., S. 34.
[8] Vgl. Frege a.a.O., S. 407.
[9] Vgl. Hilbert a.a.O., S. 34, 36 f.
[10] Vgl. Frege a.a.O., S. 407 und 313.
[11] Vgl. Frege a.a.O., S. 408 f., 415, 264 ff., 267, 289, 291, 314.
[12] Vgl. z. B. Hilbert a.a.O., S. 4.
[13] Vgl. z. B. Frege a.a.O., S. 407 f., 415 f., 262 ff., 287 ff.
[14] Vgl. Frege a.a.O., S. 411.

Begriff „liegt zwischen" etwa durch die Aussage, daß *liegt zwischen* eine Beziehung zwischen Punkten einer Geraden ist, die jene Merkmale hat, die durch die Axiome der Anordnung beschrieben werden.[15] Er schreibt dazu: „Jedes Axiom trägt ja zur Definition etwas bei und jedes neue Axiom ändert also den Begriff. ‚Punkt' in der Euklidischen, Nicht-Euklidischen, Archimedischen, Nicht-Archimedischen Geometrie ist jedes Mal was Anderes. Nach vollständiger und eindeutiger Festlegung eines Begriffes ist die Hinzufügung irgendeines Axioms meiner Ansicht nach etwas durchaus Unerlaubtes und Unlogisches – ein Fehler, der sehr häufig, besonders von Physikern, gemacht wird."[16]

Klarer und unmißverständlicher äußert sich Hilbert dazu, daß die Grundbegriffe seiner Theorie (und damit auch die Sprache, der sie angehören) ganz verschiedener Interpretationen fähig sind: „Ja, es ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren notwendigen Beziehungen zueinander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z. B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger . . ., denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z. B. der Pythagoras auch von diesen Dingen." „Die sämmtlichen Aussagen einer Elektricitätstheorie gelten natürlich auch von jedem andern System von Dingen, welches man an Stelle der Begriffe Magnetismus, Elektricität . . . substituirt, wenn nur die geforderten Axiome erfüllt sind. Der genannte Umstand kann aber nie ein Mangel (vielmehr ein gewaltiger Vorteil) einer Theorie sein und ist jedenfalls unvermeidlich. Allerdings ist zur Anwendung der Theorie auf die Welt der Erscheinungen meines Erachtens immer ein gewisses Mass von gutem Willen und Takt erforderlich: dass man für Punkte möglichst kleine Körper, für Gerade möglichst lange etwa Lichtstrahlen etc. substituirt. Auch wird man bei der Prüfung der Sätze nicht allzu genau sein dürfen; denn das sind ja nur Sätze der Theorie."[17]

Ganz offensichtlich ist Hilberts Kriterium für die Wahrheit von Sätzen inadäquat, und es ist Frege auch nicht schwergefallen, dies nachzuweisen.[18] Hingegen sind seine Aussagen zur Frage, ob die Axiome einer Theorie ihre Grundbegriffe definieren, zwar immer noch reichlich vage, aber für einen Logiker wie Frege doch klar genug, um zu verstehen, was damit gemeint ist. Hätte Hilbert oder sonst jemand den Antwortbrief Freges aus dem Jahr 1900 beachtet, so wären der logischen und mathematischen Grundlagenforschung manche Konfusionen erspart geblieben. Freges Analyse läßt sich in zwei Punkten zusammenfassen:

1. Die hilbertschen Axiome definieren tatsächlich einen Begriff, jedoch nicht den Begriff des Punktes, jedenfalls nicht den Begriff des Punktes erster Stufe, unter den Gegenstände fallen. Vielmehr definieren diese Axiome einen etwas

---

[15] Vgl. Frege a.a.O., S. 411.
[16] Vgl. Frege a.a.O., S. 412.
[17] Vgl. Frege a.a.O., S. 412 f.
[18] Vgl. Frege a.a.O., S. 417 f.

komplizierten und sechsstelligen Relationsbegriff zweiter Stufe.[19] Ich möchte Freges Argumente an einem etwas einfacheren Beispiel verdeutlichen, nämlich an Peanos Axiomensystem für die natürlichen Zahlen. Dieses kann vereinfacht werden, indem man die Begriffe der Null und der natürlichen Zahl unter Verwendung des Begriffs der Nachfolgerelation definiert. Dann wird durch die Konjunktion der Axiome nicht der Begriff der Nachfolgerelation definiert, sondern der der Progression, der eine Eigenschaft von zweistelligen Beziehungen zwischen Gegenständen, also eine Eigenschaft zweiter Stufe, bezeichnet.

2. Wenn die hilbertschen Grundbegriffe keine Bedeutung haben, so sind sie nach Frege in Wahrheit nicht Konstanten, sondern Variablen, und sollen daher auch äußerlich durch Variablen ersetzt werden. Die Axiome und Theoreme der Theorie sind dann nicht *eigentliche* Sätze, sondern *uneigentliche*, da sie ja freie Variablen enthalten, und sie sind deshalb weder wahr noch falsch. Wohl aber erhält man eigentliche Sätze und sogar logisch wahre Sätze, wenn man die Axiome konjunktiv zu einer Aussage zusammenfaßt, diese jedem der Theoreme als Bedingung voranstellt und die zu Variablen gewordenen Grundbegriffe in Allinterpretation versteht. Dies und nur dies ist nach Frege die korrekte Deutung des hilbertschen Vorgehens.[20] Die hilbertschen Axiome sagen nichts über die Bedeutung aus, die die Grundbegriffe bei der üblichen Interpretation der Sprache haben, und sie können darüber genausowenig aussagen wie jene uneigentlichen Sätze, die entstehen, wenn man in ihnen die Grundbegriffe durch Variablen oder aber durch willkürlich gebildete neue Namen ersetzt. Frege schreibt dazu: „Nehmen wir ein Beispiel! ‚Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah.‘ ‚Wie kann jemand solchen haarsträubenden Unsinn schreiben! Was ist ein Anej? Was ist ein Ellah?‘ So höre ich mit Entrüstung fragen. Bitte sehr! Das ist ein Axiom, nicht von der alten Euklidischen, sondern von der modernen Art. Es definirt den Begriff *Anej*. Was ein Anej sei, ist eine ganz ungehörige Frage. Erst wäre zu erörtern, unter welchen Umständen eine Antwort genügen würde. Wenn man keinen Gedanken in diesem Axiom findet, so schadet das nichts. Der Satz will gar keine Beschreibung bekannter Tatsachen sein, er deutet solche höchstens an, und zwar sehr fein, z. B. die bekannte Erfahrungstatsache, daß jede Wurst wenigstens zwei Enden hat, oder daß jedes Kind wenigstens zwei Fähnchen schwang.“[21]

Nun hat Hilbert allerdings nicht nur deshalb von der Bedeutung der Grundbegriffe seines Axiomensystems abstrahiert, um nicht der Gefahr zu erliegen, in den Ableitungen unbewußt Zusatzvoraussetzungen zu verwenden, sondern auch um die Unabhängigkeit der Axiome voneinander beweisen zu können. Hierzu hat Frege im Jahre 1900 nur bemerkt, daß man diese Unabhängigkeit auf Hilberts Weg oder überhaupt nicht beweisen kann, während er drei Jahre später zu zeigen versucht hat, daß ein solcher Beweis überhaupt nicht möglich sei: Wenn

---

[19] Vgl. Frege a.a.O., S. 405 f., 416, 217 f., 321.

[20] Vgl. Frege a.a.O., S. 413, 268, 282 f., 288 f., 291, 390, 303, 305 f., 307 f.

[21] Vgl. Frege a.a.O., S. 285. Da Hilbert es nicht für nötig hielt, Freges Argumente noch weiter zu beachten, ist Frege in seinen Äußerungen im Laufe der Zeit immer polemischer geworden.

man von der Bedeutung der Ausdrücke abstrahiert, seien die Sätze weder wahr noch falsch und könnten deshalb auch nicht zueinander logisch in Widerspruch stehen.[22] 1906 hat er jedoch eine eigene Technik für derartige Nachweise entwickelt, die auf einer streng nominalistischen Basis beruhen.[23]

Man denke sich eine Liste, auf die Paare von Ausdrücken einer vorgegebenen Sprache notiert sind, und zwar so, daß in jeder Zeile eines dieser Paare steht. Alle diese Wörter haben eine Bedeutung, und zwar jene, die ihnen die Sprache mitgibt. Die Liste sei so gefaltet, daß auf ihrer linken Seite alle und nur die Erstglieder dieser Paare stehen und auf der rechten Seite alle und nur die Zweitglieder. Auf der linken Seite sollen alle Ausdrücke der Sprache vorkommen, und jeder nur einmal; Frege verlangt zwar gleiches auch von der rechten Seite, doch ist das für das folgende nicht nötig. Von dieser Liste verlangt er, daß jedes Paar aus Ausdrücken besteht, die im Satz die gleiche grammatische Funktion haben, daß jedes Paar also entweder aus zwei Gegenstandsausdrücken oder aus zwei Begriffen der ersten Stufe oder aus zwei Begriffen der zweiten Stufe oder aus zwei Relationsbegriffen mit gleicher Stellenzahl bestehen, kurz: daß die beiden Ausdrücke eines Paares vom gleichen Typ sind. Schließlich fordert er von jedem derartigen Paar, daß es, falls sein Erstglied ein logischer Ausdruck wie etwa „nicht", „wenn–dann" und „identisch mit" ist, sein Zweitglied ein dazu gleichlautender Ausdruck ist, daß also lediglich der gleiche Ausdruck wiederholt wird.

Diese Liste kann man als eine Übersetzungsregel eines Satzes der Sprache in eine Folge von Wörtern der gleichen Sprache auffassen, denn sie verlangt, daß jeder Ausdruck eines Urteils durch den Begriff ersetzt werden soll, der auf der Liste an der entsprechenden Stelle rechts steht. Dazu sagt Frege: „Nur kann man fragen, ob aus einem Satze links bei der Übersetzung wiederum ein Satz rechts hervorgehe. Da ein eigentlicher Satz einen Gedanken ausdrücken muß, so wird dazu nötig sein, daß einem Gedanken links wieder ein Gedanke rechts entspreche. Legen wir eine unserer gesprochenen Sprachen zugrunde, so ist dies freilich zweifelhaft. Wir wollen hier aber eine logisch vollkommene Sprache voraussetzen. Dann wird in der Tat jedem links ausgedrückten Gedanken ein rechts ausgedrückter entsprechen."

Ein Axiom ist dann nach Frege logisch unabhängig von einer Gesamtheit von Postulaten genau dann, wenn es eine Liste der angegebenen Art gibt, so daß bei einer simultanen Ersetzung der Ausdrücke dieser Sätze entsprechend der Liste jedes der Postulate in eine wahre Aussage, das Axiom jedoch in ein falsches Urteil übergeht.

Diese Ausführungen tragen viel zur Klärung des Begriffs „Wissenschaftssprache" bei. Ich möchte folgendes behaupten: Eine *Wissenschaftssprache* ist eine *logisch vollkommene Sprache* in jenem angegebenen Sinn. Denn nur Sprachen, aus deren Sätzen durch Vertauschung der Begriffe im oben charakterisierten Sinn wiederum Sätze entstehen, wird das Prädikat „Wissenschaftssprache" ernsthaft zugesprochen werden können. Mit dieser Festlegung ist nicht a priori bestimmt,

---

[22] Vgl. Frege a.a.O., S. 414 und 266.
[23] Vgl. zum folgenden Frege a.a.O., S. 321 ff.

ob unsere Alltagssprachen Wissenschaftssprachen sind oder nicht; das kann nur empirisch entschieden werden. Ein anderes, noch zu klärendes Problem ist, ob die sprachlichen Kategorien Freges, die ja eine vorweggenommene einfache Typentheorie sind, adäquat sind oder ob sie die Ausdrücke zu detailliert oder zu wenig detailliert gliedern. Vielleicht können die Untersuchungen Noam Chomskys hier weiterhelfen.

Für Frege sind als logisch vollkommene Sprachen oder als Wissenschaftssprachen offensichtlich nur Gesamtsprachen in Frage gekommen, deren Vokabulare, unseren menschlichen Mitteilungsbedürfnissen entsprechend, vollständig sind, während Hilbert möglicherweise an von Fall zu Fall wechselnde Teilsprachen gedacht hat, die nur das Nötigste zur Formulierung der jeweiligen Theorien enthalten (genau kann man allerdings seine damaligen Ansichten nicht wiedergeben, da seine diesbezüglichen Äußerungen zu dürftig sind). Nach Frege besitzen die außerlogischen Konstanten der Sprache feste Bedeutungen, an denen nicht gerüttelt werden darf. Hilbert hingegen hat keine Bedenken gehabt, daran zu rütteln und die Interpretationen dieser Teilsprachen und damit die Bedeutungen der außerlogischen Ausdrücke beliebig zu variieren.

Freges Charakterisierung der Sprache und der Bedeutung ihrer Ausdrücke ist in der Folgezeit mit gewissen Änderungen, vor allem von Alfred Tarski, Rudolf Carnap und Willard van Orman Quine übernommen worden, wobei sich aber nur Quine ausdrücklich auf eine Gesamtsprache bezieht, während Tarski und vor allem Carnap gelegentlich auch mit Teilsprachen operieren.[24] Hilbert hätte sich, wie wir heute wissen, bei der Rechtfertigung seines Vorgehens, den sprachlichen Ausdruck von seiner Bedeutung zu unterscheiden, gegebenenfalls von seiner Bedeutung auch ganz zu abstrahieren und ihn und die Sprache, zu der er gehört, nachträglich neu zu interpretieren, auf ein großes Vorbild berufen können, nämlich auf Leibniz. Dieser hat ja die logischen Wahrheiten als jene charakterisiert, die in allen möglichen Welten gelten. Eine Präzisierung dieses Gedankens führt relativ zwanglos dazu, den Begriff „mögliche Welt“ als „Interpretation“ zu explizieren und die logisch wahren Aussagen als jene anzusehen, die bei allen Interpretationen wahr sind.[25] Auf diese Weise und unter Benützung einer symbolischen Sprache, die im Sinne Freges logisch vollkommen ist und die man als Wissenschaftssprache ansehen kann, hat Heinrich Scholz ein System der klassischen, d. h. hier auf dem zweiwertigen Wahrheitsbegriff beruhenden, Logik entwickelt.[26]

Ich möchte zur Illustration eine Wissenschaftssprache und Interpretationen einer solchen schildern. Da es sich hierbei um eine symbolische Sprache handelt, deren Ausdrücke von denen der Alltagssprache äußerlich verschieden sind, kann

[24] Vgl. Alfred Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956; Rudolf Carnap, *Introduction to Semantics*, Cambridge/Mass. 1942; Willard van Orman Quine, *World and Object*, New York 1960.

[25] Vgl. Benson Mates „Leibniz on Possible Worlds“, in: B. van Rootselaar – J. F. Staal (Hrsg.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, Amsterdam 1968, S. 507–529.

[26] Heinrich Scholz–Gisbert Hasenjaeger, *Grundzüge der mathematischen Logik*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961.

das Resultat nur in beschränktem Umfang verallgemeinert werden. Durch die bisherige Charakterisierung des Begriffs „Wissenschaftssprache“ wird ja nicht ausgeschlossen, daß auch Alltagssprachen unter ihn fallen.

Die symbolische Sprache, die ich hier entwickle,[27] enthält an logischen Konstanten die Ausdrücke ”$\neg$” (für „nicht“), ”$\wedge$” (für „und“), „$\vee$“ (für „oder“), „$\rightarrow$“ (für „wenn–dann“), ”$\leftrightarrow$” (für „genau dann, wenn“), ”$\bigwedge$” (für „jedes“), „$\bigvee$“ (für „es gibt“), „$=$“ (für „identisch mit“) und „ε“ (für die Kopula „ist“). An Hilfszeichen oder Satzzeichen besitzt sie runde, spitze und eckige Klammern sowie das Komma. Sie besitzt eine nicht begrenzte Anzahl von Variablen für Gegenstände, zu denen auch „u“, „w“, „x“, „y“ und „z“ gehören, und sie enthält die zweistelligen Relationsausdrücke „K“ und „L“. Die Sätze „x steht zu y in der Relation K“ und „u steht zu w nicht in der Relation L“ werden in dieser Sprache durch die Aussagen „$\langle x, y\rangle \,\varepsilon\, K$“ sowie „$\neg(\langle u, w\rangle \,\varepsilon\, L)$“ wiedergegeben; hingegen wird für „u ist identisch mit x“ wie üblich „$u=x$“ geschrieben und nicht „$\langle u, x\rangle \,\varepsilon\, =$“, wie es eigentlich konsequent wäre.

Der Begriff „L“ dieser Sprache wird nun folgendermaßen durch „K“ definiert:

”$\bigwedge x \bigwedge y\, [\langle x, y\rangle \,\varepsilon\, L \leftrightarrow \langle x, y\rangle \,\varepsilon\, K \wedge \bigwedge u \neg(\langle u, x\rangle \,\varepsilon\, K)]$“

(„ein x steht zu einem y in der Relation L genau dann, wenn x zu y in der Relation K steht und wenn kein Ding zu x in dieser Relation K steht“).

Der Ausdruck „K“ kann nun seinerseits nicht mehr definiert werden. Seine Bedeutung ist jedoch durch die folgenden Axiome näher charakterisierbar:

„$\bigvee y \bigvee x\, (\langle x, y\rangle \,\varepsilon\, K)$“

(„Es gibt Dinge y und x, zwischen denen die Relation K besteht“).

”$\bigwedge x \neg(\langle x, x\rangle \,\varepsilon\, K)$“

(„Kein Ding steht zu sich selbst in der Relation K“).

„$\bigwedge y\, [\neg \bigvee z\, (\langle z, y\rangle \,\varepsilon\, L) \rightarrow \neg \bigvee x\, (\langle x, y\rangle \,\varepsilon\, K)]$“

(„Wenn kein Ding zu einem y in der Relation L steht, dann steht kein Gegenstand zu y in der Relation K“).

”$\bigwedge x \bigwedge y\, [x \neq y \wedge \neg(\langle x,y\rangle \,\varepsilon\, K) \wedge \neg(\langle y,x\rangle \,\varepsilon\, K) \rightarrow \bigvee z\, (\langle z,x\rangle \,\varepsilon\, K \wedge \langle z,y\rangle \,\varepsilon\, K)]$”

(„Wenn weder ein x zu einem davon verschiedenen y noch dieses y zu dem x in der Relation K steht, dann gibt es ein Ding, das zu beiden in der Relation K steht.“) Aus diesen Axiomen ist folgendes Theorem ableitbar:

”$\bigvee x\, [\neg(\langle x,x\rangle \,\varepsilon\, K) \wedge \bigwedge y\, [x \neq y \rightarrow \langle x,y\rangle \,\varepsilon\, K \wedge \neg(\langle y,x\rangle \,\varepsilon\, K)] \wedge$

$\bigwedge z\, [\neg \langle z,z\rangle \,\varepsilon\, K \wedge \bigwedge y\, [z \neq y \rightarrow \langle z,y\rangle \,\varepsilon\, K \wedge \neg(\langle y,z\rangle \,\varepsilon\, K)] \rightarrow z=x]]$”

(„Es gibt ein x, das zu sich selbst nicht in der Relation K steht und das zu jedem anderen in dieser Relation steht, aber nicht umgekehrt, und wenn überhaupt irgendein Ding zu sich selbst nicht in K steht und zu jedem anderen in dieser Relation steht, aber nicht umgekehrt, dann ist es dieses x.“)

Man wird nun sicher, wie es Frege getan hat, einwenden, daß diese Axiome völlig unverständlich sind und daß man nicht sehen kann, was sie aussagen. Das ist richtig: Solange ich die Sprache, in der diese Axiome formuliert sind, nicht interpretiere, haben die Relationen „K“ und „L“ keine Bedeutung, so daß nicht angegeben werden kann, welche Sachverhalte die Axiome beschreiben.

[27] Vgl. W. Essler, *Einführung in die Logik,* Stuttgart ^{2}1969, S. 221–228, 243 f.

Deshalb gebe ich folgende Interpretation an: Der Gegenstandsbereich, der ihr zugrunde liegt, ist der Kosmos, so wie der Heilige Thomas von Aquin sich ihn vorgestellt hat, und der Ausdruck „K“ bezeichnet bei ihr die Beziehung der causa efficiens. Auf Grund der Definition bezeichnet dann „L“ die Relation der prima causa efficiens.

Unter Zugrundelegung dieser möglichen Welt sind die Axiome und damit auch das Theorem wahr, das dann die Existenz genau eines göttlichen Wesens behauptet. Eine noch offene und nur empirisch zu klärende Frage ist es, ob diese mögliche Welt mit unserer faktischen identisch ist oder zumindest in der Hinsicht identisch ist, die die Wahrheit der Axiome berührt.

Man erhält jene Wissenschaftssprache, wenn man die Argumentation des Heiligen Thomas mit den Mitteln einer strengen Logik analysiert und die Sprache bis zu einem gewissen Grad normiert. „K“ und „L“ werden als Abkürzungen für „causa efficiens“ und „prima causa efficiens“ verwendet, und zwar in ihrer ganzen inhaltlichen Bedeutung. In einem zweiten Schritt wird von dieser abstrahiert, und in einem dritten wird den Begriffen diese Bedeutung nachträglich wiedergegeben.

Man hätte ihnen jedoch auch eine andere Bedeutung geben können, indem man als Gegenstandsbereich etwa die Klasse der natürlichen Zahlen oder die Klasse der nichtnegativen reellen Zahlen gewählt und „K“ als die kleiner-Relation zwischen diesen Zahlen gedeutet hätte; die Axiome wären dann ebenfalls wahr gewesen (in diesem Fall sagt man, daß die Interpretation ein *Modell* des Axiomensystems ist). Ein Modell des Axiomensystems ist auch die Interpretation der Sprache über dem Bereich der bisherigen Präsidenten der USA, bei der „K“ die Relation der Amtsvorgängerschaft bezeichnet. Eine Interpretation der Sprache, die kein Modell des Axiomensystems beinhaltet und bei der einige Axiome also falsch sind, legt als Gegenstandsbereich die Klasse der Bischöfe zugrunde und ordnet dem Ausdruck „K“ die Relation *führt sein Bischofsamt zurück auf* zu; bei ihr sind die beiden letzten Axiome falsch. Das dritte Axiom ist falsch bei der Interpretation der Sprache über dem Bereich aller reellen Zahlen oder aller positiven reellen Zahlen, bei der „K“ wiederum für die kleiner-Relation steht. Diese beiden Interpretationen sind also ebenfalls kein Modell des Axiomensystems.

Aus folgenden Gründen gebe ich der hilbertschen Art der Behandlung der Sprache den Vorzug vor der fregeschen, die eine Trennung von Ausdruck und Bedeutung nicht kennt:

1. Es scheint, daß man beim Nachweis der Vollständigkeit von Systemen der engeren Quantorenlogik und höherer Logiksysteme genötigt ist, von der Bedeutung der außerlogischen Konstanten zu abstrahieren und diese in einem zweiten Schritt neu zu interpretieren, und zwar an der Stelle, an der man aus der Tatsache, daß unter Verwendung eines Logikkalküls aus einer Gesamtheit von Sätzen nicht zwei sich widersprechende Aussagen ableitbar sind, darauf schließt, daß es eine Interpretation gibt, bei der alle Sätze dieser Gesamtheit wahr sind. Freilich ist die Tatsache, daß man bisher immer auf diese Weise vorgegangen ist und daß sich niemand vorstellen kann, wie man die Vollständig-

keit dieser Systeme anders zeigen kann, noch kein hinreichender Grund dafür, daß es keinen solchen Beweis ohne diesen Schritt gibt.

2. Wenn man einen Computer entwickelt, der logische Operationen durchzuführen hat, so wird man ihm eine normierte Sprache mitgeben, die im allgemeinen eine symbolische Sprache ist, von deren Interpretation man abstrahieren und deren Interpretation man beliebig variieren kann.

3. Auch bei natürlichen Sprachen ist man häufig genötigt, von deren üblicher Interpretation zu abstrahieren, nämlich immer dann, wenn man diese gar nicht kennt, sei es, daß man die betreffende Sprache zufällig nicht versteht, sei es, daß es sich um eine noch nicht entzifferte Sprache einer versunkenen Kultur handelt.

4. Selbst wenn man auf diese Fakten nicht hinweisen könnte, so müßte man doch zugeben, daß Hilberts Verfahren der Variation der Interpretation logisch durchführbar ist und daß niemand verhindern kann, daß wir Freges Sprache formalisieren, indem wir die Sätze, die er für wahr hält, zu einer Klasse von Axiomen zusammenfassen und sodann von der Interpretation der Sprache und damit von der Bedeutung der außerlogischen Begriffe abstrahieren. Wenn man eine noch nicht oder nicht mehr interpretierte Sprache neu interpretieren will, so muß jene Sprache, in der man *über* die vorgegebene Sprache redet (die *Metasprache* dieser vorgegebenen Sprache), selbstverständlich interpretiert sein; aber das ist kein Grund für die Behauptung, daß man von der Interpretation eben dieser vorgegebenen Sprache nicht abstrahieren dürfe. In vielen Fällen ist es wesentlich einfacher, die Interpretation der Sprache teilweise oder ganz zu ändern, als in einer gewissen Gesamtheit von Aussagen die darin vorkommenden Ausdrücke simultan durch andere zu ersetzen, wie es Frege vorgeschlagen hat. Dies gilt insbesondere dann, wenn man beweisen will, daß Axiome oder Begriffe voneinander unabhängig oder daß Axiomensysteme kategorisch sind. Auch bei der Metrisierung von Begriffen ist dieses Verfahren leicht und elegant anwendbar, indem man zunächst ein uninterpretiertes Axiomensystem angibt, das etwa den Längenbegriff charakterisieren soll, und sodann zeigt, daß es sowohl empirisch, also über einem Bereich von physikalischen Körpern, als auch logisch-mathematisch, also über einem Bereich von Zahlen, interpretierbar ist.

5. Man kann ferner fragen, worin denn nun eigentlich der Unterschied zwischen Konstanten und Variablen zu suchen ist, auf den Frege so großen Wert gelegt hat. Rein syntaktisch gesehen, bei Abstrahierung von der Bedeutung dieser Ausdrücke, äußert er sich darin, aber auch nur darin, daß (in einer logisch vollkommenen Sprache bzw. in einer Wissenschaftssprache) auf einen Quantor, also auf einen der Ausdrücke „jedes" und „es gibt", nur *Variablen,* nicht jedoch *Konstanten* folgen dürfen. Semantisch und unter Verwendung des Interpretationsbegriffs ist dieser Unterschied weniger scharf zu fassen. Ich möchte ihn folgendermaßen charakterisieren: Wir sind jederzeit gerne bereit, unsere Interpretation der Sprache bezüglich der Variablen abzuändern, und tun dies auch ständig, auch bezüglich der Variablen unserer Alltagssprache, wie etwa der Ausdrücke „Ding", „Gegenstand" usw. Bezüglich der *Konstanten* allerdings nehmen wir derartige Änderungen nur ungern vor, aber doch gelegentlich, wenn

es die faktischen Gegebenheiten erfordern, wie etwa beim Begriff „Fisch", der früher die Gesamtheit der ständig im Wasser lebenden Tiere und heute die Klasse der durch Kiemen atmenden Wirbeltiere bezeichnet. Auch Grundbegriffe einer Theorie ändern gelegentlich ihre Bedeutung, wie etwa der Begriff des Signals oder des Wirkens, den Newton anders verstanden hat als Einstein.

6. Vielleicht kann man bei der Behandlung der Sprache nach Hilberts Art auch das Programm der Phänomenalisten verständlicher machen und es von gewissen Aspekten des Solipsismus befreien. Der Phänomenalist will ja zeigen, daß sich unsere Welt ausschließlich aus Bewußtseinsinhalten zusammensetzt, und er ist zur Rechtfertigung dieser Behauptung genötigt, anzugeben, wie sie sich aus diesen aufbauen. Da wir die Phänomene nur durch Sätze beschreiben können und diese sich aus Begriffen zusammensetzen, scheint der Phänomenalist also genötigt zu sein, sämtliche Begriffe seiner Sprache durch Explizitdefinitionen oder bedingte Definitionen auf Begriffe über seine Bewußtseinsinhalte zurückzuführen. Statt dessen wäre es vielleicht besser, von einer intersubjektiv verständlichen Sprache auszugehen und zu sagen, daß der einzelne Mensch die außerlogischen Begriffe dieser Sprache über dem Bereich seiner Bewußtseinsinhalte interpretiert. Im allgemeinen werden diese Interpretationen in ihrer Struktur gleich sein, was man auch dadurch erkennen kann, daß verschiedene Menschen die gleichen Allbehauptungen für wahr ansehen, doch wird dies nicht in allen Fällen zutreffen. Auch dies kann durch die hilbertsche Methode besser wiedergegeben werden als durch jene Freges.

7. Ob durch die Methode der Trennung von Ausdruck und Bedeutung auch das Problem geklärt werden kann, wie Theorien, die ganz oder partiell empirisch interpretiert sind, von jenen zu unterscheiden sind, die keine empirische Interpretation besitzen, weiß ich nicht. Sicherlich wird sie aber helfen, die Schwierigkeiten besser zu verstehen, die mit Carnaps Unterscheidungskriterium verbunden sind.[28]

8. Es scheint mir schließlich, daß man durch dieses Verfahren auch das Problem klären kann, was man unter der *Intension* (unter dem *Inhalt*) eines Begriffs im Gegensatz zu seiner *Extension* (seinem *Umfang*) zu verstehen hat. In der üblichen Darstellung der Logiklehrbücher werden die außerlogischen Begriffe rein extensional interpretiert: den Gegenstandsausdrücken werden Gegenstände, den Eigenschaftsausdrücken Gesamtheiten von Gegenständen, den zweistelligen Beziehungsausdrücken Gesamtheiten von Paaren von Gegenständen zugeordnet usw. Die Interpretation des Ausdrucks sagt dabei nichts über dessen *Intension* aus. Carnap und andere haben versucht, auch Interpretationsbegriffe zu charakterisieren, die den Ausdrücken der Sprache Intensionen zuordnen.[29] Ich glaube, daß wir den Bereich der Entitäten, über die die Sprache

[28] Vgl. Rudolf Carnap „The Methodological Character of Theoretical Concepts", in H. Feigl–M. Scriven, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science I,* Minneapolis 1956, S. 38–76; Peter Achinstein, *Concepts of Science,* 1968, S. 79 ff.; David Kaplan, *Significance and Analyticity* (Skriptum, unveröffentlicht).

[29] Vgl. Rudolf Carnap, *Meaning and Necessity,* Chicago ²1956; Rudolf Carnap, *Notes on Semantics* (Skriptum, unveröffentlicht, 1955, 1960).

redet, nicht noch um Intensionen vermehren sollten; wir haben doch mit den Extensionen schon genügend Schwierigkeiten. Es scheint mir sinnvoller, die Antwort auf die Frage nach der Intension eines Begriffs in einer anderen Richtung zu suchen. Wenn wir z. B. nach der Intension des Begriffs „Fisch" gefragt werden, so geben wir eine Definition dieses Ausdrucks und sagen etwa, daß ein Fisch ein mit Kiemen atmendes Wirbeltier ist. Ähnlich können wir versuchen, die Begriffe „durch Kiemen atmend" und „Wirbeltier" zu definieren, bis wir schließlich zu jenen Ausdrücken gelangen, die wir im Rahmen einer akzeptierten Theorie als Grundbegriffe ansehen. Die Intension dieser Grundbegriffe kann man dann nicht mehr durch eine Definition charakterisieren, ohne daß man die Theorie verläßt. Sie kann andererseits aber nur durch eindeutige Festlegung dieser Grundbegriffe vollständig und adäquat charakterisiert werden. Wie ist das möglich? Ich glaube, die Antwort liegt auf der Hand: Die Grundbegriffe sind dann und nur dann eindeutig charakterisiert, wenn die Axiome, die für sie angegeben werden, kategorisch oder zumindest für einen Bereich mit fest vorgegebener Anzahl von Dingen kategorisch sind. In diesem Sinn haben Hilbert die Grundbegriffe der Geometrie und Peano die Grundbegriffe der Arithmetik eindeutig charakterisiert. Die Intension eines Begriffs ist dann also die *Struktur* der Extension, die er bei einer Interpretation der Sprache, die die Axiome wahr macht, bezeichnet, oder, um mit Hilbert zu sprechen, die Intension ist das Begriffsschema, dessen *Inhalt* dann die *Begriffsextension* ist. Dies mag auf den ersten Blick paradox erscheinen, trotzdem sehe ich nicht, was Intensionen sonst sein sollen. Freilich ist es denkbar, daß gewisse Begriffe, wie etwa die Farbprädikate, keine klar angebbare Intension besitzen und durch kein kategorisches Axiomensystem charakterisiert werden können. Sollte aber – das ist meine These – ein Begriff eine eindeutige Intension besitzen, so kann diese durch ein kategorisches Axiomensystem adäquat beschrieben werden.