

Eine Rekonstruktion von Hans Hermes „Vorbetrachtungen zur Einführung des Impulsbetrages“

Michael Schneider

`<m_schnei@cs.uni-frankfurt.de>`

— Mai 2004 —

(Revision vom 28.12.2007)

Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Fachbereich Philosophie und Geschichtswissenschaften
Institut für Philosophie
Lehrstuhl für Logik und Wissenschaftstheorie
(Prof. Dr. Wilhelm K. Essler)

Zusammenfassung

Hans Hermes Dissertation „*Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik*“ aus dem Jahr 1938 dürfte die erste vollständige Axiomatisierung der Speziellen Relativitätstheorie gewesen sein. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz muss jedoch als unüblich angesehen werden, da die Begriffe von Kraft und Masse nicht als Grundbegriffe verwendet werden, und der Impulsbegriff in rein kinematischer Weise definiert wird. Um dennoch eine Übereinstimmung mit herkömmlichen Lehrbuchdarstellungen der Mechanik zu gewährleisten, führt Hermes einen Äquivalenznachweis zwischen seinem System und einem zweiten Axiomensystem, von dem er ausgeht, dass die darin enthaltenen Axiome von Physikern allgemein akzeptiert werden. Den Kern dieses Äquivalenznachweises bildet der Beweis einer Übereinstimmung der Impulsbetragsbegriffe in den jeweiligen Axiomensystemen. Die entsprechende Erörterung findet in Kapitel 7, „*Vorbetrachtungen zur Einführung des Impulsbetrages*“, von Hermes Arbeit statt. Leider ist gerade dieses Kapitel in äußerst knapper und schwer verständlicher Form gehalten, und es muss eher als eine sehr grobe Beweis-Skizze denn als ein ausgearbeiteter Beweis bezeichnet werden. Mit der vorliegenden Arbeit wird nun eine vollständige und ausführlich kommentierte mathematische Rekonstruktion dieses Kapitels erbracht.

Keywords: Hermes, Axiomatisierung, Relativitätstheorie, Mechanik, Impulsbetrag

1 Einleitung

Im Jahre 1938 veröffentlichte Hans Hermes seine Dissertation mit dem Titel: „*Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik*“ [HE], worin ausgehend von den beiden Grundbegriffen „*Genidentität*“ und „*Bezugssystem*“ ein Axiomensystem für Einsteins Spezielle Relativitätstheorie entwickelt wird.

Ungewöhnlich an dieser Arbeit mag erscheinen, dass die in vielen anderen Darstellungen der Mechanik grundlegende *Kraft* und *Masse* bei Hermes *abgeleitete* Begriffe sind und erst gegen Ende seiner Theorie behandelt werden. Ihre Definitionen basieren auf dem Begriff des *Impulses*, der seinerseits aber ebenfalls keinen Grundbegriff dieses Systems darstellt. Als vektorielle Größe lässt sich der Impuls aus einer Richtungs- und einer Betragskomponente zusammengesetzt einführen, und Hermes definiert diese beiden Entitäten rein kinematisch: Die *Impulsrichtung* wird mit der Richtung der *Geschwindigkeit* des betrachteten Materiepunktes identifiziert, während der *Impulsbetrag* desselben in operationaler Weise über das *Volumenverhältnis* zweier unelastisch miteinander kollidierender und dabei zum Stillstand kommender Kugeln festgelegt wird. So grundlegend der auf diese Weise erhaltene Impulsbegriff für den weiteren Fortgang seiner Axiomatisierung ist, so sehr muss sich Hermes darum bemühen klar zustellen, dass er mit seinem recht komplizierten „Experiment“ überhaupt den Impulsbetrag im traditionellen Sinne korrekt erfasst hat, um am Ende nicht durch eine mit den üblichen Lehrbuchdarstellungen unvereinbare Definition sein ganzes Unternehmen zu gefährden. Er liefert daher in § 7 seiner Arbeit, nach der Behandlung der grundlegenden kinematischen Begriffe, und noch vor Einführung des Impulses und aller darauf aufbauenden Begriffe, eine entsprechende Begründung ab.

Wilhelm K. Essler, Professor am Fachbereich Philosophie der J. W. Goethe-Universität Frankfurt a.M., und Mitarbeiter haben vor einigen Jahren ihr Buch „*Theorie und Erfahrung*“ [ES] veröffentlicht, indem sie u.a. eine weitgehend vollständige und umfangreich kommentierte Rekonstruktion der im Original mathematisch äußerst kompakt darstellten Arbeit Hermes vorlegen, gehalten in einer modernen Logiksprache, wie sie z.B. in [L1][L2] entwickelt wird. Auch der Hermesschen Definition des Impulsbetrages wird in diesem Werk große Aufmerksamkeit geschenkt. Lediglich erwähnter § 7 in der Originalarbeit hat keinen, oder zumindest nur einen sehr rudimentären Eingang in Esslers Buch gefunden. Das ist *fachlich* betrachtet nicht wirklich tragisch insofern, dass § 7 der eigentlichen mechanischen Theorie nichts Essentielles hinzufügt in Form zusätzlicher Grundbegriffe, Axiome oder bedeutender Definitionen und Sätze. Allerdings wird ohne das Verständnis dieses Teils der Arbeit evtl. das ungute Gefühl beim Leser verbleiben, dass die Hermessche Theorie am Ende vielleicht gar nicht vollständig mit dem Inhalt herkömmlicher physikalischer Darstellungen übereinstimmen könnte, und daher wäre eine Behandlung zumindest wünschenswert.

Die vorliegende Arbeit ist aus einem Vortrag hervorgegangen, den der Autor im Wintersemester 2000/01 an der Universität Frankfurt am Main im Rahmen eines Seminars gehalten hat, welches die Hermessche Axiomatisierung zum Thema hatte. Es wurde versucht die genannte Lücke zu schließen, indem eine – ebenfalls ausführlich kommentierte – Rekonstruktion von Hermes „*Vorbetrachtungen zur Einführung des Impulsbetrages*“ (§ 7) durchgeführt wurde. Dabei hat sich der Autor bemüht, die Darstellung an die von Es-

ler gewählte Symbolik und Nomenklatur anzupassen, soweit dies möglich oder sinnvoll erschien.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden in knapper Form die kinematischen Grundlagen präsentiert, die für die weitere Diskussion benötigt werden. Daran schließt sich die Hermessche Definition des Impulses in Kapitel 3 an; beide Kapitel halten sich weitgehend an die von Essler verwendete Darstellungsweise. Kapitel 4 liefert die Rekonstruktion von § 7 aus Hermes Arbeit und erbringt somit die Rechtfertigung für die vorangegangene Definition des Impulsbetrages. Die Erörterung endet mit einem Fazit in Kapitel 5.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden in knapper Form die Begriffe, Axiome sowie die wichtigsten Sätze präsentiert, welche nötig sind, um die Impulsdefinition in Kapitel 3 und die in Kapitel 4 dargelegten Argumente zu ihrer Rechtfertigung nachvollziehen zu können. Der verwendete Formalismus, dessen Kenntnis in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, ist der in Esslers Buch [ES] vorgestellte; Für eine umfassendere Behandlung des hier präsentierten Stoffes muss auf dieses Werk verwiesen werden. Zur besseren Orientierung wird bei Definitionen, Axiomen und Sätzen stets die von Essler dafür verwendete Nummerierung mit angegeben, also ‘ $D_{i,j}^{hm}$ ’ für Definitionen, ‘ $A_{i,j}^{hm}$ ’ für Axiome und ‘ $S_{i,j}^{hm}$ ’ für Sätze.

Es sollte erwähnt werden, dass in dieser Arbeit diverse Themen aus Hermes Theorie nur gestreift oder überhaupt nicht behandelt werden, da sie für das Verständnis von Kapitel 4 nicht benötigt werden. Hierzu gehört insbesondere der Begriff des „lichtartigen Teilchens“ und mithin der gesamte *relativistische* Aspekt von Hermes Arbeit [ES, Abschnitt 11]. Des weiteren wird nicht auf die Begriffe „*Kraft*“ [ES, Abschnitt 15] und „*Masse*“ [ES, Abschnitt 16] eingegangen werden, da deren Definitionen erst auf dem Impulsbegriff aufbauen.

2.1 Kinematik

Es werden die Grundbegriffe „*Genidentität*“ und „*Bezugssystem*“ axiomatisch charakterisiert, und es wird definiert, was wir unter *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* verstehen wollen.

2.1.1 Die Menge F der „momentanen Materiepunkte“

Wir gehen aus vom (physikalischen) Universum $U := \lambda x : x = x$ aller mit sich selbst identischen Objekte, welches disjunkt in die Mengen \mathbb{R} der reellen Zahlen und F der sog. „*momentanen Materiepunkte*“ (‘m.m.P.’)¹ zerfällt:

¹Diese Abkürzung verwendet Hermes für „momentane materielle Punkte“. Essler gebraucht keine eigene Abkürzung, weswegen wir bei der Hermesschen Buchstabenfolge bleiben werden.

Definition 1 (Momentane Materiepunkte, \mathbb{F} [$D_{0,1}^{\text{hm}}$]).

$$\mathbb{F} = \mathbb{U} \setminus \mathbb{R}$$

Unter einem m.m.P. wollen wir die »kleinsten Augenblicksteile der kleinsten räumlichen Teile der Körper [verstehen] aus denen dann die einzelnen Entitäten der Mechanik [...] zu konstituieren sind« [ES, Abschnitt 11, S. 136].

2.1.2 Bezugssysteme

Durch ein stets vorzugebendes *Bezugssystem* (Bz) $S : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^4$ wird jeder m.m.P. $x \in \mathbb{F}$ *eindeutig* auf eine Raum-Zeit-Koordinate $\varphi := \langle \alpha, \beta, \gamma, \tau \rangle \in \mathbb{R}^4$ *abgebildet*, wobei das Tripel $\xi := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ den *Ortsvektor* $ov_S(x)$ ($D_{0,4}^{\text{hm}}$) und der Skalar τ die *Zeit* $zt_S(x)$ ($D_{0,5}^{\text{hm}}$) von x bezeichnen.

Axiom 1 (Bezugssysteme, Bz [$A_{0,3}^{\text{hm}}$, $A_{0,4}^{\text{hm}}$]).

$$\text{Bz} \subseteq \text{Eind}_{(\leftrightarrow)} \wedge \bigwedge S \in \text{Bz} : [\text{fkt}_S : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^4]$$

‘ $\text{Eind}_{(\leftrightarrow)}$ ’ benennt die Menge aller eindeutigen Relationen, d.h. injektiven Abbildungen [ES, Abschnitt 4], und ‘ fkt_S ’ bezeichnet die durch die – rechtseindeutige – Relation S vermittelte (unbenannte) Funktion.

Charakteristisch für Bezugssysteme ist, dass sie durch *Lorentztransformationen* (LoTr) ineinander überführbar sind:

Axiom 2 (Lorentztransformation, LoTr [$A_{1,2}^{\text{hm}}$, $A_{1,3}^{\text{hm}}$]).

$$\bigwedge S, S' \in \text{Bz} \bigwedge T \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 (\langle T, S \rangle \in \text{LoTr}) : S|T \in \text{Bz} \wedge \langle S^{-1}|S', S \rangle \in \text{LoTr}$$

Dabei sind Lorentztransformationen gemäß $D_{1,7}^{\text{hm}}$ eindeutige Relationen T des \mathbb{R}^4 in sich selbst dergestalt,² dass für m.m.P.e x und y mit im Bezugssystem S gleicher Bewegungsrichtung, bei Geschwindigkeit $g\bar{s}_{S|T}(x) = \vec{0}$ (‘ $g\bar{s}_S(\cdot)$ ’ wird in 2.1.4 eingeführt), gilt:

$$g\bar{s}_S(y) = \frac{g\bar{s}_S(x) + g\bar{s}_{S|T}(y)}{1 + \frac{g\bar{s}_S(x) \cdot g\bar{s}_{S|T}(y)}{c^2}}$$

Dabei bezeichnet ‘ c ’ die Lichtgeschwindigkeit. Für eine weitergehende Behandlung der relativistischen Aspekte der Hermesschen Theorie siehe [ES], Abschnitte 11, 14 und 16.

² Die Bezeichnung ‘ $R_1|R_2$ ’ aus Axiom 2 benennt das *Produkt zweier Relationen* [ES, Abschnitt 3][L2]:

$$\bigwedge R_1 R_2 : R_1|R_2 = \lambda xy : \bigvee z : \langle x, z \rangle \in R_1 \wedge \langle z, y \rangle \in R_2$$

NOTE:
Diese
Definition
der Lor-
entztrans-
formation
ist *falsch!*

2.1.3 Genidentität und Materiepunkte

Durch die Äquivalenzrelation „Genidentität“ (GnId) wird das Feld \mathbb{F} in einzelne *Materiepunkte* (Mp) zerlegt:

Axiom 3 (Genidentität, GnId $[A_{0.1}^{\text{hm}}, A_{0.2}^{\text{hm}}, S_{0.2}^{\text{hm}}]$).

$$\langle \text{GnId}, \mathbb{F} \rangle \varepsilon \ddot{\text{Äqu}} \wedge \text{br}(\text{GnId}, \mathbb{U}) = \mathbb{F}$$

Definition 2 (Materiepunkte, Mp $[D_{0.2}^{\text{hm}}]$).

$$\text{Mp} = \lambda G \subseteq \mathbb{F} : \bigvee x \varepsilon \mathbb{F} : G = \llbracket x \rrbracket_{\text{GnId}, \mathbb{F}}$$

Mit ‘ $\text{br}(R, M)$ ’ ist der *Bereich* einer Relation R über der Menge M gemeint, auf dem R tatsächlich definiert ist (in unserem Fall ist z.B. GnId nur auf dem Teilbereich \mathbb{F} von \mathbb{U} definiert), und ‘ $\llbracket x \rrbracket_{R, M}$ ’ bezeichnet die Äquivalenzklasse des Elements x aus der Menge M hinsichtlich der Äquivalenzrelation (‘Äqu’) $\langle R, M \rangle$ [ES, Abschnitt 3][L2].

Materiepunkte sollen unsere intuitive Vorstellung von der „Weltlinie“ eines Teilchens im Raum-Zeit-Kontinuum manifestieren. Daher fordern wir, dass hinsichtlich jedes Bezugssystems S einerseits zwei voneinander verschiedene m.m.P.e x und y , welche dem gleichen Materiepunkt $\text{mp}(x)$ ($D_{0.3}^{\text{hm}}$) zugehören, unterschiedliche Zeiten besitzen, andererseits aber auch zu jedem Zeitpunkt $\tau \varepsilon \mathbb{R}$ ein $y \varepsilon \text{mp}(x)$ existiert:

Axiom 4 (Materiepunkte $[A_{0.5}^{\text{hm}}]$).

$$\bigwedge S \varepsilon \text{Bz} \bigwedge \tau \varepsilon \mathbb{R} \bigwedge H \varepsilon \text{Mp} \bigvee x \varepsilon H : \text{zt}_S(x) = \tau$$

2.1.4 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Des weiteren muss die *Ortsfunktion* $\text{ort}_{S, H}(\tau)$ ($D_{0.7}^{\text{hm}}$) eines Materiepunktes $H \varepsilon \text{Mp}$ einen „glatten“ Verlauf besitzen, also hinreichend oft *differenzierbar* sein, damit man zu jedem Zeitpunkt τ die *Momentan-Geschwindigkeit* $\text{gsw}'_{S, H}(\tau) := \text{ort}'_{S, H}(\tau)$ ($D_{0.8}^{\text{hm}}$) und die *Momentan-Beschleunigung* $\text{bsl}_{S, H}(\tau) := \text{gsw}'_{S, H}(\tau)$ ($D_{0.10}^{\text{hm}}$) eines Materiepunktes H ermitteln kann:

Axiom 5 (Geschwindigkeit und Beschleunigung $[A_{0.6}^{\text{hm}}, A_{0.7}^{\text{hm}}]$).

$$\bigwedge S \varepsilon \text{Bz} \bigwedge H \varepsilon \text{Mp} \bigwedge \tau \varepsilon \mathbb{R} : \text{ort}_{S, H} \varepsilon D_\tau \wedge \text{gsw}_{S, H} \varepsilon D_\tau$$

Dabei bezeichnet ‘ D_x ’ die Menge aller bei $x \varepsilon \mathbb{R}^n$ differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; in unserem Fall ist also von bzgl. der *Zeit* ableitbaren Funktionen die Rede [ES, Anhang 2]. Die *Geschwindigkeit eines m.m.P. x* hinsichtlich des Bezugssystems S bezeichnen wir fortan mit ‘ $\text{gsw}_S(x)$ ’ ($D_{0.9}^{\text{hm}}$). Eine entsprechende Bezeichnung für die *Beschleunigung* eines m.m.P. werden wir in dieser Arbeit nicht benötigen.

2.2 Körper

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit zusammengesetzten materiellen Objekten, den *Systemen* und deren wichtiger Unterkategorie der *Körper*, sowie mit den sog. „gewöhnlichen Punkten“ als einer Unterklasse der momentanen Materiepunkte.

2.2.1 Systeme

Wir stellen uns materielle Gegenstände intuitiv als aus räumlich „dicht gepackten“ Ansammlungen von m.m.P.e zusammengesetzt vor. Um den Begriff des *Körpers* (Korp_S) formal sauber definieren zu können, gehen wir vom Begriff des (*offenen*) *Volumens* aus:

Definition 3 (*n*-dimensionales Volumen, Vol^n [ES, Anhang 2][A2]). *Wir verstehen unter einem n-dimensionalen Volumen D , kurz: „ $D \in \text{Vol}^n$ “, eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge $D \in \mathbb{R}^n$. „Offen“ heißt D dabei, wenn es um jedes Element $\varphi \in D$ eine kugelförmige Umgebung $U_\rho(\varphi)$ mit einem Radius $\rho > 0$ gibt, die vollständig in D liegt. „Beschränkt“ ist D , wenn es eine kugelförmige Umgebung $U_R(D)$ mit einem Radius $R > 0$ gibt, in der D vollständig als Teilmenge enthalten ist. „Zusammenhängend“ heißt D schließlich, wenn es kein Paar offener und disjunkter Mengen M_1 und M_2 gibt, sodass D vollständig in deren Vereinigung $M_1 \cup M_2$ liegt.*

Haben wir nun, bei fest vorgegebenem Bezugssystem S , ein *räumliches* ($n = 3$) Volumen D und einen Zeitpunkt τ spezifiziert, so bilden sämtliche m.m.P.e $x \in \mathbb{F}$, welche durch S auf eine Raumkoordinate $\varphi \in D$ und den Zeitpunkt τ abgebildet werden, ein sog. *System*:

Definition 4 (Systeme, $\text{sy}_S(D, \tau)$ [$D_{1.1}^{\text{hm}}$]).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge D \in \text{Vol}_S^3 \bigwedge \tau \in \mathbb{R} : \text{sy}_S(D, \tau) = \lambda x \in \mathbb{F} : [\text{zt}_S(x) = \tau \wedge \text{ov}_S(x) \in D]$$

Mit ‘ Sy_S ’ ($D_{1.2}^{\text{hm}}$) wollen wir im weiteren Verlauf die Menge aller (nichtleeren) Systeme $\text{sy}_S(D, \tau)$ bezeichnen.

2.2.2 Isoliertheit

Ein System G heißt *θ -isoliert* ($\text{Isol}_{S,\theta}$), wenn es in seiner θ -Umgebung keine „fremden“ Teilchen gibt, präzise formuliert:

Definition 5 (θ -Isoliertheit, $\text{Isol}_{S,\theta}$ [$D_{1.3}^{\text{hm}}$]).

$$\begin{aligned} \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge G \in \text{Sy}_S \bigwedge \theta \in \mathbb{R}^+ : G \in \text{Isol}_{S,\theta} \leftrightarrow \\ \bigwedge x \in G \bigwedge y \in \mathbb{F} : \text{zt}_S(x) = \text{zt}_S(y) \wedge \|\text{ov}_S(x) - \text{ov}_S(y)\| < \theta \rightarrow y \in G \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit ‘ $\|\cdot\|$ ’ die *Norm* eines Vektors:³

$$\|\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi_i^2} \quad (\text{Euklidische Norm}) \quad (1)$$

Generell „isoliert“ (Isl_S) heißt G , wenn es *irgendein* $\theta \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $G \in \text{Isol}_{S,\theta} (\text{D}_{1.4}^{\text{hm}})$.

2.2.3 Momentankörper

Als *Momentankörper* (MoKo_S) bezeichnen wir solche Systeme, die sozusagen ihr Volumen „vollständig ausfüllen“:

Definition 6 (Momentankörper, $\text{MoKo}_S [\text{D}_{2.2}^{\text{hm}}, \text{D}_{2.3}^{\text{hm}}]$).

$$\begin{aligned} \bigwedge S \in \text{Bz} : \text{MoKo}_S = \lambda G \in \text{Sy}_S : \bigvee D \in \text{Vol}_S^3 \bigvee \tau \in \mathbb{R} : \\ G = \text{sy}_S(D, \tau) \wedge \bigwedge \varphi \in D \bigvee y \in G : \text{ov}_S(y) = \varphi \end{aligned}$$

Die allesamt zu verschiedenen Materiepunkten gehörenden m.m.P.e, welche einen *Momentankörper* ausmachen, besitzen also, bezogen auf das aktuell betrachtete Bezugssystem S , alle die gleiche Zeit.

2.2.4 Die Körperdefinition

Zwei Momentankörper $G, H \in \text{MoKo}_S$ bezeichnen wir als *genidentisch* (GnIdKo_S), wenn es eine Bijektion f zwischen G und H dergestalt gibt, dass f jedem $x \in G$ einen *genidentischen* Partner $y \in H$ zuordnet und umgekehrt ($\text{D}_{2.6}^{\text{hm}}$). Wir können nun, ähnlich wie wir aus m.m.P.e Materiepunkte gebildet haben, genidentische Momentankörper zu Äquivalenzklassen zusammenfassen, um sagen zu können, was zeitlich ausgedehnte *Körper* sind. Im Unterschied zu den Materiepunkten werden wir aber realistischerweise nicht verlangen können, dass Körper ewig existieren, dass also zu *jedem* Zeitpunkt τ eine Repräsentation durch einen Momentankörper mit Zeit τ existiert. Wir beschränken uns vielmehr auf ein (aus technischen Gründen halboffenes) Zeitintervall $I := (\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 < \tau_2$, welches mit genidentischen Nachfolgern und Vorgängern eines in I liegenden Referenzmomentankörpers H „lückenlos ausgefüllt“ ist:

Definition 7 (Körper, $\text{Korp}_S [\text{D}_{2.8}^{\text{hm}}]$).

$$\begin{aligned} \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge H \in \text{MoKo}_S \bigwedge K \subseteq \text{MoKo}_S : \langle K, H \rangle \in \text{Korp}_S \leftrightarrow \\ \bigwedge G \in K [\langle G, H \rangle \in \text{GnIdKo}_S] \\ \wedge \bigvee \tau_1 \tau_2 \in \mathbb{R} (\text{zt}_S(H) \in (\tau_1, \tau_2]) : \bigwedge \tau \in (\tau_1, \tau_2] \bigvee G \in K [\text{zt}_S(G) = \tau] \\ \wedge \bigwedge G \in K \bigvee \tau \in (\tau_1, \tau_2] [\text{zt}_S(G) = \tau] \end{aligned}$$

³ Essler verwendet die gleiche Kennzeichnung ‘ $|\cdot|$ ’ sowohl für Absolutbeträge von Zahlen als auch für Vektornormen [ES, Anhang 2]. Dem Autor ist es wohler, wenn er hierzu unterschiedliche Zeichen verwendet, vor allem weil in Kapitel 4 gelegentlich beide Konstrukte *gemeinsam* in Ausdrücken auftreten werden.

Wir bezeichnen die Klasse aller Körper hinsichtlich eines Bezugssystems $S \in \text{Bz}$ mit ‘ Krp_S ’ ($\text{D}_{2.9}^{\text{hm}}$).

2.2.5 Die Menge \mathbb{G} der „gewöhnlichen Punkte“

Wie führen nun mit der Menge der *gewöhnlichen Punkte* (\mathbb{G}) eine für unsere Zwecke wichtige Unterart der momentanen Materiepunkte ein:

Definition 8 (Gewöhnliche Punkte, \mathbb{G} [$\text{D}_{2.10}^{\text{hm}}, \text{S}_{2.6}^{\text{hm}}$]).

$$\mathbb{G} = \lambda x \in \mathbb{F} : \bigwedge S \in \text{Bz} \bigvee E \in \text{Vol}_S^4 (\text{fkt}_S(x) \in E) : \\ \bigwedge \chi \in E \bigvee y \in \mathbb{F} [\text{fkt}_S(y) = \chi] \wedge \bigwedge \varphi \in E [\text{g}\bar{s}_S \circ \text{fkt}_S^{-1} \in \text{D}_\varphi]$$

Die Bedeutung von ‘ $\text{fkt}_S(\cdot)$ ’ wurde bei Axiom 1 erklärt. Durch den Infixoperator ‘ \circ ’ wird wie üblich die *Komposition* zweier Funktionen f und g bezeichnet: $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Mit „ $x \in \mathbb{G}$ “ ist somit ein solcher m.m.P. gemeint, der (unabhängig vom gewählten Bezugssystem) in einer kompletten räumlichen Umgebung „dicht“ von anderen m.m.P.e umgeben ist, mithin *Bestandteil eines Momentankörpers* ist ($\text{S}_{2.7}^{\text{hm}}$). Tatsächlich muss diese Eigenschaft für einen *gewissen Zeitabschnitt* erfüllt sein („ $\bigvee E \in \text{Vol}_S^4$ “), und die Änderungsrate der Weltlinien-Geschwindigkeitsdichte innerhalb dieses Raum-Zeit-Volumens E hat sehr homogen zu sein („ $\text{g}\bar{s}_S \circ \text{fkt}_S^{-1} \in \text{D}_\varphi$ “).

2.2.6 Kompression

Wir betrachten zwei genidentische m.m.P.e $x, y \in \mathbb{G}$, die in ebenfalls genidentischen Momentankörpern G und H enthalten sind. Die Abbildungsfunktion $\text{fkt}_{S,G,H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, partiell definiert durch

$$\text{fkt}_{S,G,H}(\varphi) := \iota \psi \in \mathbb{R}^3 : \\ \bigvee z \in G \bigvee w \in H (\langle z, w \rangle \in \text{GnId}) : \varphi = \text{ov}_S(z) \wedge \psi = \text{ov}_S(w) \\ \text{falls } \bigvee z \in G : \text{ov}_S(z) = \varphi$$

bilde die Ortsvektoren der einzelnen m.m.P.e der beiden Momentankörper aufeinander ab.⁴ y heißt im Vergleich zu x *um das c -fache komprimiert* (Cpr_S), wenn das genidentische Pendant einer geeignet gewählten lokalen Umgebung von x bei y um den Faktor c verkleinert vorliegt. Mathematisch beschrieben lautet die Definition:

Definition 9 (Kompression, Cpr_S [$\text{D}_{4.2}^{\text{hm}}$]).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge xy \in \mathbb{G} \bigwedge c \in \mathbb{R}^+ : \langle x, y, c \rangle \in \text{Cpr}_S \leftrightarrow \\ \langle x, y \rangle \in \text{GnId} \wedge \bigvee GH \in \text{MoKo}_S (\langle G, H \rangle \in \text{GnIdKo}_S \wedge x \in G \wedge y \in H) : \\ \det(\text{fkt}'_{S,G,H}(\text{ov}_S(x))) = c$$

⁴ Essler nennt diese Funktion anders und definiert sie auch nicht genauso (vgl. $\text{D}_{4.1}^{\text{hm}}$ in [ES] und die daran anschließende Diskussion), aber beide Definitionen drücken inhaltlich i.W. das Gleiche aus.

In dieser Definition bezeichnet ‘ $\det(\cdot)$ ’ die *Determinante* [ES, Anhang 2][LA], und zu ihrer Anwendung muss vorausgesetzt werden, dass $\text{fkt}_{S,G,H}(\cdot)$ *differenzierbar* ist auf ihrem Definitionsbereich, was wir (implizit) durch folgendes Axiom fordern:

Axiom 6 (Kompression $[A_{4.1}^{\text{hm}}, D_{4.4}^{\text{hm}}, S_{4.4}^{\text{hm}}]$).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge K \in \text{Krp}_S \bigwedge xy \in \bigcup K(\langle x, y \rangle \in \text{GnId}) : \bigvee c \in \mathbb{R}^+ : \langle x, y, c \rangle \in \text{Cpr}_S$$

Wenn zwischen zwei zueinander genidentischen gewöhnlichen Punkten das Kompressionsverhältnis $c = 1$ herrscht, so nennen wir beide *identisch dicht* (Idd_S).⁵

Definition 10 (Identische Dichte, Idd_S).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge xy \in \mathbb{G} : \langle x, y \rangle \in \text{Idd}_S \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \text{GnId} \wedge \langle x, y, 1 \rangle \in \text{Cpr}_S$$

3 Der Impuls

Der *Impuls* eines materiellen Objektes ist ebenso wie dessen Geschwindigkeit als eine vektorielle Größe einzuführen; wir haben also sowohl seine *Richtung* – dargestellt in Form eines Vektors normierter Länge – als auch seinen *Betrag* – stets ein nichtnegativer reeller Skalar – zu definieren. Wir werden den Impuls zunächst wieder für einzelne m.m.P.e, genauer: für gewöhnliche Punkte (\mathbb{G}) definieren, und den Begriff später auf Momentankörper ausweiten.

3.1 Impulsrichtung

Die *Richtung* ‘ $\text{imp} \uparrow_S(x)$ ’ des Impulses eines gewöhnlichen Punktes x identifizieren wir naheliegenderweise mit der Richtung seiner *Geschwindigkeit* $\text{g}\bar{s}_S(x)$:

Definition 11 (Impulsrichtung, $\text{imp} \uparrow_S(x)$ [$D_{3.1}^{\text{hm}}$]).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge x \in \mathbb{G} (\text{g}\bar{s}_S(x) \neq \vec{0}) : \text{imp} \uparrow_S(x) = \frac{\text{g}\bar{s}_S(x)}{\|\text{g}\bar{s}_S(x)\|}$$

⁵ Essler bezeichnet zwei m.m.P.e als „gleich dicht“ (Gld , $D_{4.10}^{\text{hm}}$), wenn es ein Bezugssystem S gibt, sodass

$$\text{cpr}_S(x, y) \cdot \frac{\sqrt{1 - \|\text{g}\bar{s}_S(x)\|^2 \cdot (c^2)^{-1}}}{\sqrt{1 - \|\text{g}\bar{s}_S(y)\|^2 \cdot (c^2)^{-1}}} = 1$$

gilt, mit der Lichtgeschwindigkeit ‘ c ’ und $\text{cpr}_S(x, y) := \iota \rho : \langle x, y, \rho \rangle \in \text{Cpr}_S$. Wir verwenden in dieser Arbeit nicht den relativistischen Aspekt von Hermes Theorie, und wir werden bei der Impulsbetragsdefinition auch nicht das Bezugssystem wechseln. Wenn wir in Kapitel 4 in Postulat 11 (S. 37) aber auf die hier angegebene Definition von Idd_S zugreifen, werden wir zusätzlich annehmen, dass die Schnelligkeiten $\|\text{g}\bar{s}_S(x)\|$ und $\|\text{g}\bar{s}_S(y)\|$ identisch sind. Wie man sofort sieht, stellt unter diesen Umständen unsere Definition von Idd_S einen Spezialfall von Esslers Gld -Relation dar.

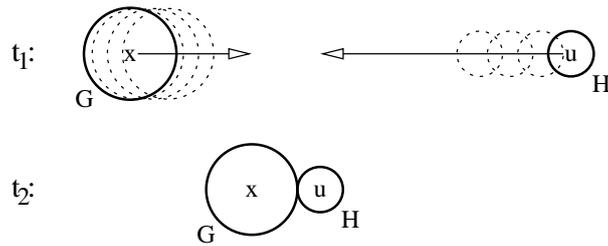


Abbildung 1: Unelastischer Zusammenstoß

3.2 Impulsbetrag

Die Definition des Impulsbetrages geschieht in operationaler Weise [ES, Abschnitt 5][W1]. Wir formalisieren dabei folgendes Gedankenexperiment: Um den Impulsbetrag eines momentanen Materiepunktes $x \in G$ an einem „Standardobjekt“ $u \in G$ zu messen, dessen Impulsbetrag wir mit ‘1’ festlegen, lassen wir zwei kugelförmige Körper G und H , welche x und u als Mittelpunkte besitzen, auf gerader, die beiden Mittelpunkte verbindender Bahn frontal zusammenstoßen. Der Zusammenstoß geschieht vollkommen *unelastisch*. Die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Kugeln sollen dabei so gewählt werden, dass das aus den Kugeln bestehende Gesamtsystem nach dem Zusammenstoß eine resultierende Geschwindigkeit von $\vec{0}$ besitzt. Dabei ist dem Abbremsvorgang eine gewisse Zeit einzuräumen, da eine spontane, d.h. unstetige Geschwindigkeitsreduzierung nicht mit dem bisher entwickelten Axiomensystem vereinbar wäre (die Ortskurven der Materiepunkte sind ausnahmslos differenzierbar, vgl. Axiom 5 in 2.1.4, S. 4). Abb. 1 zeigt die Situation.

Unter idealen Voraussetzungen könnte man dann folgern, dass der Impulsbetrag beider *Kugeln* H und G identisch gewesen sein muss (bei umgekehrter Impulsrichtung). Damit ließe sich dann das Verhältnis der Impulsbeträge der m.m.P.e x und u durch das *Volumenverhältnis* der Kugeln H zu G ausdrücken.

Um allerdings mit der angestrebten Definition möglichst realistische Situationen erfassen zu können, dürfen wir nicht wirklich von derart idealen Verhältnissen ausgehen: Reale Körper besitzen im Normalfall weder eine vollkommen homogene Materieverteilung, noch darf man eine wirklich vollständige Ruhe des Systems nach dem Zusammenstoß verlangen, noch wird man eine vollständige Abschottung des Experiments von äußeren Einflüssen annehmen dürfen. Bei der Gestaltung des „Experimentalaufbaus“ werden wir diese Probleme zu beachten haben, was uns allerdings nur unter Inkaufnahme einer deutlichen Verkomplizierung der Definition des unelastischen Zusammenstoßes gelingen wird.

Die grundsätzliche Idee ist, dass wir das Experiment unter immer besseren Voraussetzungen wiederholen können. Eine Verbesserung der *Homogenität der Materieverteilung* in den Kugeln, erreichen wir durch eine zunehmende *Verkleinerung der Kugeln*. Wir werden zudem eine gewisse *Beweglichkeit der inneren m.m.P.e* erlauben, diese aber immer weiter einschränken. Schließlich werden wir durch *zunehmende Isolierung* θ des aus beiden Kugeln bestehenden Gesamtsystems während des Zusammenstoßes eine immer bessere *Abschottung äußerer Kräfte* erreichen.

3.2.1 Der unelastische Zusammenstoß

Wir führen als Hilfsbegriff denjenigen des *kugelförmigen Momentankörpers* (Kg_S) ein: Wir schreiben „ $\langle G, x \rangle \in \text{Kg}_S$ “, wenn das zum Momentankörper G gehörende Volumen $D \in \text{Vol}_S^3$ eine *sphärische* Form mit dem Mittelpunkt $\text{ov}_S(x)$ besitzt ($\text{D}_{3.3}^{\text{hm}}$).

Als erstes legen wir nun fest, was wir unter einem *unelastischen Zusammenstoß* zweier frontal aufeinander zu bewegter Kugeln $\langle G, x \rangle$ und $\langle H, u \rangle$ verstehen wollen. Die Definition lautet:

Definition 12 (Unelastischer Zusammenstoß, UeZs_S [$\text{D}_{3.4}^{\text{hm}}$]).

$$\begin{aligned}
& \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge GH \in \text{MoKo}_S \bigwedge x \in G \bigwedge u \in H (\langle G, x \rangle, \langle H, u \rangle \in \text{Kg}_S) \\
& \bigwedge \tau \sigma \theta \rho \delta \in \mathbb{R}^+ : \langle x, G, u, H, \tau, \sigma, \theta, \rho, \delta \rangle \in \text{UeZs}_S \leftrightarrow \\
& \quad \text{zt}_S(G) = \text{zt}_S(H) \\
& \quad \wedge \text{rs}_S(\text{vol}_S^3(G)) \leq \rho \geq \text{rs}_S(\text{vol}_S^3(H)) \\
& \quad \wedge G \cap H = \emptyset \wedge \dot{\bigvee} \varphi \in \mathbb{R}^3 [\varphi \in \text{rd}(\text{vol}_S^3(G)) \cap \text{rd}(\text{vol}_S^3(H))] \\
& \quad \wedge \text{g}\bar{s}_S(x) \neq \vec{0} \neq \text{g}\bar{s}_S(u) \\
& \quad \wedge \bigvee \eta \kappa \in \mathbb{R}^+ [\eta \cdot \text{g}\bar{s}_S(x) = \text{ov}_S(u) - \text{ov}_S(x) = -\kappa \cdot \text{g}\bar{s}_S(x)] \\
& \quad \wedge \bigwedge \tau' \in [\text{zt}_S(G), \text{zt}_S(G) + \tau] \\
& \quad \quad \bigvee G' H' \in \text{MoKo}_S (\langle G, G' \rangle, \langle H, H' \rangle \in \text{GnIdKo}_S \wedge \text{zt}_S(G') = \text{zt}_S(H') = \tau') : \\
& \quad \quad \quad G' \cup H' \in \text{Isol}_{S,\theta} \\
& \quad \wedge \bigwedge \sigma' \in [\text{zt}_S(G) + \tau, \text{zt}_S(G) + \tau + \sigma] \\
& \quad \quad \bigvee G' H' \in \text{MoKo}_S (\langle G, G' \rangle, \langle H, H' \rangle \in \text{GnIdKo}_S \wedge \text{zt}_S(G') = \text{zt}_S(H') = \sigma') : \\
& \quad \quad \quad G' \cup H' \in \text{Isol}_{S,\theta} \wedge \bigwedge z \in G' \cup H' : \|\text{g}\bar{s}_S(z)\| \leq \delta
\end{aligned}$$

Diese Definition lässt sich wie folgt interpretieren: Die Volumina $\text{vol}_S^3(\cdot)$ der Kugeln $\langle G, x \rangle$ und $\langle H, u \rangle$, die sich auf gerader Bahn frontal aufeinander zu bewegen („ $\eta \cdot \text{g}\bar{s}_S(x) = \text{ov}_S(u) - \text{ov}_S(x) = -\kappa \cdot \text{g}\bar{s}_S(u)$ “), besitzen beide einen Radius $\text{rs}_S(\cdot)$ kleiner einer vorgegebenen Konstante ρ . Im Augenblick des Zusammenstoßes berühren sie sich in einem einzigen Raumpunkt φ , der auf dem *Rand* $\text{rd}(\cdot)$ sowohl von G als auch von H liegt. Der „Rand“ ist dabei wie folgt definiert:

Definition 13 (Rand, $\text{rd}(\cdot)$ [ES, Anhang 2][A2]). *Es sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge (vgl. Def. 3). Die Menge aller Häufungspunkte von U , die selbst nicht in U liegen, heißt der Rand $\text{rd}(U)$ von U (bei einer offenen Kugel ist der Rand anschaulich die „Kugelwand“). Dabei ist ein Element $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ein „Häufungspunkt“ von U , wenn es eine gegen φ konvergente Folge (u_n) gibt, deren Glieder u_n allesamt aus U stammen.*

Der Zusammenstoß erfolgt nicht abrupt, sondern der Abbremsprozess dauert eine gewisse Zeit τ an, während der das System $G \cup H$ (genauer: das zu jedem Zeitpunkt $\text{zt}_S(G) + \tau'$,

für $0 \leq \tau' \leq \tau$, bestehende genidentische Nachfolgesystem $G' \cup H'$ zu $G \cup H$)⁶ θ -isoliert für eine bestimmte vorgegebene Konstante θ , also gegenüber äußeren kinematischen Einwirkungen abgeschottet ist.⁷

Ferner wird verlangt, dass die genidentischen Nachfolger $G' \cup H'$ des durch die Kollision entstandenen Systems $G \cup H$ auch noch *nach* der Abbremszeit τ für eine gewisse Zeit σ allesamt θ -isoliert sind. Außerdem sollen die Geschwindigkeitsbeträge $\|\mathbf{g}\bar{s}_S(z)\|$ sämtlicher m.m.P.e $z \in G' \cup H'$ geringer als ein Vorgabewert δ sein. In dieser Forderung nach „weitgehender Ruhe“ gegen Ende des Experiments drückt sich letztendlich die Eigenschaft der *Unelastizität* des Zusammenstoßes aus.⁸

3.2.2 Das Volumenverhältnis

Als Zweites geben wir an, wie sich das *Volumenverhältnis* ξ der beiden unelastisch zusammengestoßenen Kugeln $\langle G, x \rangle$ und $\langle H, u \rangle$ ergibt, wobei wir mit „ $\mu(\text{vol}_S^3(G)) \in \mathbb{R}^+$ “ das *Maß* des Volumens [ES, Anhang 2], also dessen Rauminhalt bezeichnen werden.⁹ Wir gehen hier allerdings noch nicht von „idealen“ Verhältnissen aus; diese werden erst später durch verschiedene Grenzübergänge erreicht. Vielmehr werden wir hier zunächst nur verlangen, dass sich das „gemessene“ Volumenverhältnis $\hat{\xi} := \mu(\text{vol}_S^3(H)) / \mu(\text{vol}_S^3(G))$ höchstens um einen Wert ν vom zu definierenden Zielwert ξ unterscheidet.¹⁰

Definition 14 (Volumenverhältnis, VIVh_S [$\text{D}_{3.5}^{\text{hm}}$]).

$$\begin{aligned} & \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge GH \in \text{MoKo}_S \bigwedge x \in G \bigwedge u \in H (\langle G, x \rangle, \langle H, u \rangle \in \text{Kg}_S) \\ & \bigwedge \xi \nu \in \mathbb{R}^+ \langle x, G, u, H, \xi, \nu \rangle \in \text{VIVh}_S \leftrightarrow \\ & \left| \frac{\mu(\text{vol}_S^3(H))}{\mu(\text{vol}_S^3(G))} - \xi \right| \leq \nu \end{aligned}$$

⁶ Die Mengen $G' \cup H'$ momentaner Materiepunkte stellen tatsächlich *Systeme* gemäß Def. 4 dar. Die Volumina von G' und H' sind jeweils zwei Kugeln, deren Ränder sich in genau einem Punkt treffen. Aufgrund der vorausgesetzten θ -Isoliertheit erlaubt eine solche Konstellation die Angabe eines dreidimensionalen Volumens nach Def. 3, welches genau nur die Ortsvektoren aller m.m.P.e aus $G' \cup H'$ umfasst.

⁷ Man beachte, dass hier ganz bewusst nur von *kinematischen* Einwirkungen die Rede ist, wie sie z.B. durch direkte Stöße zwischen materiellen Objekten verursacht werden. Wir werden hingegen nicht erwarten können, dass eine Isoliertheit endlicher Ausdehnung die vollständige Abschottung eines Systems gegenüber *beliebigen* Formen äußerer Einwirkungen zur Folge hat, also insbesondere gegenüber Fernwirkungskräften. Vielmehr werden wir später in Abschnitt 4.4 mittels geeigneter Postulate explizit fordern, dass sich die Gesamtstärke äußerer Einwirkungen durch eine Erhöhung des Isoliertheitsgrades beliebig reduzieren lässt.

⁸ Bei Essler ist diese zusätzliche Anforderung der Ruhe nach dem Abbremsvorgang Bestandteil der Definition des Volumenverhältnisses ($\text{D}_{3.5}^{\text{hm}}$), welches bei uns in Abschnitt 3.2.2 behandelt wird. Es macht nach Ansicht des Autors aber mehr Sinn, diese Zusatzforderung als zur operationalen Charakterisierung des Zusammenstoß-Experiments zugehörig anzusehen.

⁹ Im Falle der hier von uns betrachteten *kugelförmigen* Momentankörper G ist stets $\mu(\text{vol}_S^3(G)) = \frac{4}{3}\pi\rho^3$ für $\rho := \text{rs}_S(\text{vol}_S^3(G))$.

¹⁰ Esslers Version der Definition des Volumenverhältnisses enthält als zusätzlichen Bestandteil die Forderung einer gewissen Ruhe am Ende des unelastischen Zusammenstoßes. Dieser Teil wurde in der vorliegenden Arbeit konsequenterweise der Definition 12 des unelastischen Zusammenstoßes hinzugefügt.

3.2.3 Die Definition des Impulsbetrages

Wir können nun, basierend auf den entwickelten Begriffen des unelastischen Zusammenstoßes und des Volumenverhältnisses, die angestrebte Definition des *Impulsbetrags* ‘Imp $||_S$ ’ erbringen. Um diese handlicher aufschreiben zu können, führen wir zunächst noch zwei Hilfsbegriffe ein: Zum einen definieren wir in nahe liegender Weise den Begriff des *Teilmomentankörpers* G (TlMoKo $_S$) eines Momentankörpers H für den Fall $G \subseteq H$ und $G \in \text{MoKo}_S$ (D $_{2,4}^{\text{hm}}$). Des weiteren formalisieren wir das *Drehen* einer Kugel $\langle G, x \rangle$ (DrKg $_S$) ähnlich zur Definition von „Drehkörpern“ bei Essler (D $_{3,2}^{\text{hm}}$):¹¹

Definition 15 (Drehkugel, DrKg $_S$).

$$\begin{aligned} \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge GH \in \text{MoKo}_S (\langle G, H \rangle \in \text{GnIdKo}_S) \bigwedge x \in G \bigwedge y \in H \\ (\langle x, y \rangle \in \text{GnId} \wedge \langle G, x \rangle, \langle H, y \rangle \in \text{Kg}_S) : \langle G, H \rangle \in \text{DrKg}_S \leftrightarrow \\ \bigvee f \in \text{Orth} \bigwedge w \in G \bigwedge z \in H (\langle w, z \rangle \in \text{GnId}) : \\ \text{g}\bar{s}_S(z) = f(\text{g}\bar{s}_S(w)) \wedge \text{ov}_S(z) - \text{ov}_S(y) = f(\text{ov}_S(w) - \text{ov}_S(x)) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ‘Orth’ die Menge der *orthogonalen Funktionen* [ES, Anhang 2][LA]. Drehkugeln sind also im Prinzip die völlig unveränderten Kugeln zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt betrachtet, dabei evtl. lediglich um den Mittelpunkt gedreht.

Wir können jetzt den Impulsbetrag ξ eines Punktes $x \in \mathbb{G}$ gemessen am Standardobjekt u („ $\langle x, u, \xi \rangle \in \text{Imp}||_S$ “) definieren. Die Vorstellung dabei ist, dass wir das Experiment, welches zum unelastischen Zusammenstoß (UeZs $_S$) der beiden x und u umgebenden Kugeln G und H führt, für (gesteuert durch die Radiusschranke ρ) immer kleiner werdende Teilkugeln G' und H' durchführen können (die Kugeln dürfen falls nötig in die richtige Orientierung gedreht werden). Gleichzeitig, so die Vorstellung, können die verbleibenden inneren Restgeschwindigkeiten $\|\text{g}\bar{s}_S(z)\|$ der m.m.P.e $z \in G' \cup H'$ immer weiter durch die Schranke δ reduziert werden. Dies hat zum Ziel, die Genauigkeit ν der Approximation „ $\mu(\text{vol}_S^3(H')) / \mu(\text{vol}_S^3(G'))$ “, also der des Volumenverhältnisses (VIVh $_S$), stets weiter zu steigern:

$$\left| \frac{\mu(\text{vol}_S^3(H'))}{\mu(\text{vol}_S^3(G'))} - \xi \right| \leq \nu, \nu \rightarrow 0$$

Insgesamt ergibt sich somit folgende Formulierung:

¹¹Der Autor beschränkt sich hier anders als in [ES] von vornherein auf *genidentische Kugeln* mit *genidentischen Mittelpunkten*, was für unsere Zwecke ausreicht und die Definition etwas übersichtlicher macht.

Definition 16 (Impulsbetrag, $\text{Imp}|_S$ [$D_{3,6}^{\text{hm}}$]).

$$\begin{aligned}
& \bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge xu \in \mathbb{G} \bigwedge \xi \in \mathbb{R}^+ : \langle x, u, \xi \rangle \in \text{Imp}|_S \leftrightarrow \\
& \bigvee GH \in \text{MoKo}_S(x \in G \wedge u \in H) : \\
& \quad \bigwedge \rho \delta \nu \in \mathbb{R}^+ \bigvee G' H' \in \text{MoKo}_S(\langle G', G \rangle, \langle H', H \rangle \in \text{DrKg}_S | \text{TI MoKo}_S) : \\
& \quad \bigvee x' \in G' \bigvee u' \in H' (\langle x, x' \rangle, \langle u, u' \rangle \in \text{GnId} \wedge \langle G', x' \rangle, \langle H', u' \rangle \in \text{Kg}_S) \\
& \quad \bigvee \tau \theta \sigma \in \mathbb{R}^+ : \\
& \quad \quad \langle x', G', u', H', \tau, \sigma, \theta, \rho, \delta \rangle \in \text{UeZs}_S \\
& \quad \quad \wedge \langle x', G', u', H', \xi, \nu \rangle \in \text{VIVh}_S
\end{aligned}$$

Diese Definition entspricht im Prinzip einer *Limes-Definition* mit Grenzwert ξ . Um dies einzusehen, vergleichen wir zunächst Def. 16 mit dem etwas spezielleren Fall einer Folge $(\omega'_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ und einer Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\bigwedge \phi \in \mathbb{R}^+ \bigvee n_\phi \in \mathbb{N} : \left| \omega'_{n_\phi} - \omega \right| \leq \phi \tag{2}$$

Der Allquantifizierung über ϕ in (2) entspricht in Def. 16 die Allquantifizierung über die Größen ρ, δ und ν . Der Existenzquantifizierung über n_ϕ in (2) entspricht in Def. 16 die Gesamtheit aller der Allquantifizierung nachfolgenden Existenzquantifizierungen. Der betragsmäßigen Abschätzung der Folgenglieder ω'_{n_ϕ} in (2) entsprechen in Def. 16 effektiv die Ausdrücke

$$\langle x', G', u', H', \tau, \sigma, \theta, \rho, \delta \rangle \in \text{UeZs}_S$$

sowie

$$\langle x', G', u', H', \xi, \nu \rangle \in \text{VIVh}_S$$

Letzteres wird klar nach einem Blick in die entsprechenden Definitionen: Zum einen ist Def. 14 des *Volumenverhältnisses* charakterisiert durch die betragsmäßige Abschätzung des Volumenverhältnisses:

$$\left| \frac{\mu(\text{vol}_S^3(H))}{\mu(\text{vol}_S^3(G))} - \xi \right| \leq \nu$$

Zum anderen werden in Def. 12 des *Unelastischen Zusammenstoßes* erstens die Volumendiagramme $\text{rs}_S(\text{vol}_S^3(\cdot))$ der Momentankörper G und H durch ρ , und zweitens die Endschnelligkeiten $\|\text{g}\bar{\text{s}}_S(z)\|$ der in den Momentankörpern enthaltenen m.m.P.e durch δ abgeschätzt. In den zuletzt genannten beiden Fällen erfolgt der Vergleich jeweils gegen die Zahl 0.

Basierend auf der Folge $(\omega'_n)_{n \geq 0}$ aus (2) lässt sich nun eine *konvergente* Folge $(\omega_m)_{m \geq 0}$ konstruieren. Dazu gehen wir von der reellwertigen Zahlenfolge $\phi_m := 1/m$ aus. Durch (2) wird die Existenz eines Index n_{ϕ_m} , und mithin eines Folgengliedes $\omega_m := \omega'_{n_{\phi_m}}$ gewährleistet,

sodass die Beziehung $|\omega_m - \omega| \leq \phi_m$ zutrifft. Mit dieser Setzung gilt dann für alle später auftretenden Indizes $m + i$, $i > 0$, ebenfalls die Eigenschaft $|\omega_{m+i} - \omega| \leq \phi_{m+i} \leq \phi_m$. Damit besitzen wir die neue Folge $(\omega_m)_{m \geq 0}$, welche den Grenzwert ω besitzt gemäß der generellen *Limes-Definition für Folgen*:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_m) = \omega \leftrightarrow \bigwedge \phi \in \mathbb{R}^+ \bigvee m_\phi \in \mathbb{N} \bigwedge m \in \mathbb{N} (m \geq m_\phi) : |\omega_m - \omega| \leq \phi \quad (\text{Limes}) \quad (3)$$

Weil aber Def. 16 des *Impulsbetrags* die gleiche Grundform besitzt wie in (2), ist es plausibel, dass auch Def. 16 implizit eine konvergente Folge definiert.

Wir müssen noch axiomatisch fordern, dass der so definierte Grenzwert, d.h. der Impulsbetrag eines bewegten gewöhnlichen Punktes stets existiert und eindeutig ist:

Axiom 7 (Impulsbetrag $[A_{3.1}^{\text{hm}}]$).

$$\bigwedge S \in \text{Bz} \bigwedge x u \in \mathbb{G} (\text{g}\bar{s}_S(x) \neq \vec{0} \neq \text{g}\bar{s}_S(u) \wedge \langle x, u \rangle \notin \text{GnId}) \\ \bigvee \xi \in \mathbb{R}^+ : \langle x, u, \xi \rangle \in \text{Imp} \Big|_S$$

Damit können wir jetzt vom Impulsbetrag ‘ $\text{imp} \Big|_{S,u}(x)$ ’ eines m.m.P. $x \in \mathbb{G}$ relativ zum Bezugssystem S und gemessen am Standardobjekt $u \in \mathbb{G}$ sprechen als *demjenigen* Wert $\xi \in \mathbb{R}$, für den $\langle x, u, \xi \rangle \in \text{Imp} \Big|_S$ ($D_{3.7}^{\text{hm}}$). Hierbei sind allerdings ein paar Spezialfälle gesondert zu betrachten:

1. Die Definition von ‘ $\text{Imp} \Big|_S$ ’ kann nicht angewandt werden, falls $\text{g}\bar{s}_S(x) = \vec{0}$. Nach unserem physikalischen Verständnis weisen wir *unbewegten* Objekten aber keinen positiven Impulsbetrag zu. Dementsprechend setzen wir

$$\text{imp} \Big|_{S,u}(x) \Big|_{\text{g}\bar{s}_S(x)=\vec{0}} := 0$$

2. Falls $x = u$, dann kann das „Experiment“ aus Def. 16 eigentlich ebenfalls nicht angewendet werden, da dort x und u Mittelpunkte *elementfremder* Kugeln waren. Allerdings hatten wir für das Standardobjekt u bereits den Impulsbetrag per Konvention festgelegt: Es ist

$$\text{imp} \Big|_{S,u}(u) := 1$$

Man beachte, dass sich das Standardobjekt u immer in Bewegung zu befinden hat, da ansonsten die erwähnte Setzung $\text{imp} \Big|_{S,u}(u) := 1$ nicht sinnvoll wäre.

3. Auch der Fall *genidentischer* Objekte x und u , mit $x \neq u$, wird von obiger Definition nicht abgedeckt. Wir hatten aber in 2.2.6 den Begriff der *Kompression* (Def. 9) kennen gelernt. Gemäß Axiom 6 steht der gewöhnliche Punkt x zu u in einem eindeutig

bestimmten Kompressionsverhältnis c .¹² Besitzen x und u die gleiche Geschwindigkeit, so wird x der Impulsbetrag c zugeordnet, da u definitionsgemäß den Impulsbetrag 1 besitzt (s. Punkt 2). Für den Fall ungleicher Geschwindigkeiten sind noch relativistische Aspekte zu beachten. Hierzu wird auf [ES, Abschnitt 14] verwiesen.

4. Schwierig ist der Fall *zeitgleicher*, aber *nicht* genidentischer Objekte, welche sich nicht mittels des geschilderten Experiments vergleichen lassen. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn sich die beiden Objekte an unterschiedlichen Orten befinden, oder eine unpassende, sprich nicht frontal aufeinander zu gerichtete Ausrichtung besitzen. Hierfür gibt es mindestens zwei unterschiedliche Lösungsansätze:

- Man fordert (unter Angabe entsprechender Axiome), dass es für x und u genidentische Vorgänger oder Nachfolger x' und u' gibt, welche wiederum zeitgleich zueinander sind, und für die sich das hier geschilderte Zusammenstoß-Experiment durchführen lässt. Die Idee ist hierbei, dass man *im Prinzip immer* die beiden entsprechenden Körper in einer Weise zusammenbringen *könnte*, welche die Durchführung des Experiments erlaubt.
- Man fordert (wieder mittels entsprechender Axiome), dass stets ein adäquates Vergleichsobjekt u' zur Verfügung steht, welches eine exakte Kopie von u darstellt, und mit welchem sich das Experiment stellvertretend für u durchführen lässt. Die Idee hierbei ist motiviert von der klassischen Situation, wie sie z.B. vom „Pariser Urmeter“ her bekannt ist: Längenmessungen werden üblicherweise nicht direkt an diesem Referenzobjekt durchgeführt, sondern an möglichst exakten Kopien desselben.

Beide genannten Ansätze müssen als physikalisch problematisch angesehen werden.

5. Es verbleibt der Fall zweier Objekte, welche sowohl *nicht* genidentisch, als auch *nicht* zeitgleich sind. Hierbei wird man so vorgehen, dass man zunächst für x denjenigen genidentischen Nachfolger x' bestimmt, welcher zeitgleich zu u ist. Es ist dann das *Kompressionsverhältnis* c zwischen x und x' gemäß Punkt 3 zu ermitteln. Damit liegt nun eine Situation wie unter Punkt 4 beschrieben vor, und wir können den Impulsbetrag zwischen x' und u entsprechend der dortigen Erörterungen bestimmen. Dieser Impulsbetrag muss am Ende noch um das zuvor ermittelte Kompressionsverhältnis c korrigiert werden.

3.3 Die Definition des Impulses eines gewöhnlichen Punktes

Der Begriff des *Impulses* setzt sich zusammen aus den Begriffen „Impulsrichtung“ und „Impulsbetrag“: Für einen m.m.P. $x \in G$ wird der Impuls ‘ $\text{imp}_{S,u}(x)$ ’, gemessen an einem

¹² Genau genommen müßten x und u dem gleichen (zeitlich ausgedehnten) Körper entstammen, denn nur dieser Fall wird von Axiom 6 behandelt. Die Definition 9 besitzt diese Einschränkung allerdings nicht. Es müsste noch genauer untersucht werden, ob sich der Anwendungsbereich des Axioms weiter ausweiten lässt, um unserem Zweck an dieser Stelle zu genügen.

Standardobjekt $u \in \mathbb{G}$, angegeben als

Definition 17 (Impuls, $\text{imp}_{S,u}(x)$ [D_{3.10}^{hm}]).

$$\text{imp}_{S,u}(x) := \begin{cases} \vec{0} & : \text{für } g\bar{s}_S(x) = \vec{0} \\ \text{imp}\|_{S,u}(x) \cdot \text{imp}\uparrow_S(x) & : \text{sonst} \end{cases}$$

Im Übrigen gelten die zum Ende von 3.2.3 gemachten Bemerkungen zu den diversen Sonderfällen sinngemäß auch für diese Definition.

3.4 Impuls eines Momentankörpers

Abschließend soll noch erklärt werden, was unter dem Impuls eines *Momentankörpers* G zu verstehen ist. Wir bilden dazu das Integral über die Impulsvektoren sämtlicher gewöhnlicher Punkte, aus denen der Momentankörper G besteht. Mit der in [ES] verwendeten Schreibweise erhalten wir also:

Definition 18 (Körperimpuls, $\text{impko}_{S,u}(G)$ [D_{3.11}^{hm}]).

$$\text{impko}_{S,u}(G) = \int [[\lambda \varphi \psi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : [\text{imp}_{S,u}(z \in G : \text{ov}_S(z) = \varphi) = \psi]] , \text{vol}_S^3(G)]$$

Die *Existenz und Eindeutigkeit* des Impulses eines jeden Momentankörpers $G \in \text{MoKo}_S$ wird weitgehend gewährleistet durch das zusätzliche Axiom A_{3.3}^{hm}, welches die *Randstetigkeit* der im Integral verwendeten Dichtefunktion $\text{imp}_{S,u}(\cdot)$ fordert:

Definition 19 (Randstetigkeit [ES, Anhang 2][A2]). *Die Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit offenem U (vgl. Def. 3, S. 5) heißt randstetig, wenn f in jedem Punkt $u \in U$ stetig ist, und es eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : U \cup \text{rd}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ von f auf dem Rand $\text{rd}(U)$ (vgl. Def. 13, S. 10) gibt, d.h. $\hat{f}(u) = f(u)$ für $u \in U$ und \hat{f} stetig auf ganz $U \cup \text{rd}(U)$.*

Ein um seinen Rand ergänztes Volumen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nämlich sowohl *beschränkt* (vgl. Def. 3) als auch *abgeschlossen* (es enthält alle seine Häufungspunkte, vgl. Def. 13), und eine über einer solchen Menge definierte stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist dort ihrerseits beschränkt [A2]. Beschränkte stetige Funktionen sind aber laut *Lebesgueschem Integrierbarkeitskriterium* über *jordanmessbaren* Mengen integrierbar. Dabei nennen wir eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ „*jordanmessbar*“, wenn sich ihre *charakteristische Funktion* χ_D integrieren lässt, also die Funktion, die über ganz D identisch 1 und ansonsten 0 ist. Diese Eigenschaft trifft nun nicht notwendigerweise auf *alle* möglichen Volumina im Sinne von Def. 3 zu, sodass man vielleicht noch weitere einschränkende Anforderungen an die für Körper in Frage kommenden Formen treffen müsste. In jedem Fall aber lässt sich die Jordanmessbarkeit für bestimmte einfache Formen zeigen, insbesondere für *kugelförmige* Gebiete. Damit ist die Existenz des Impulses immerhin für solche Momentankörper gesichert, wie wir sie bei der Definition des Impulsbetrages verwendet haben – und wie wir sie auch im folgenden Kapitel ausschließlich betrachten werden.

4 Rechtfertigung der Impulsbetragsdefinition

Dieses Kapitel rekonstruiert § 7 der Hermesschen Originalarbeit, worin der Autor die Definition des Impulsbetrages, wie sie in der vorliegenden Arbeit in 3.2 angegeben wurde, begründet.

4.1 Übersicht

Hermes lässt in seiner Definition des Impulsbetrages (Def. 16, 3.2.3, S. 12) wie gesehen zwei Kugeln mit beschränktem Radius unelastisch zusammenstoßen, und betrachtet für den Fall, dass das Gesamtsystem (weitgehend) zum Stillstand kommt, das *Volumenverhältnis* zwischen beiden Kugeln. Er verbessert daraufhin das Experiment Schritt für Schritt, indem er den erlaubten Kugelradius immer weiter reduziert und auch an die Endgeschwindigkeiten der m.m.P.e des Systems immer restriktivere Anforderungen stellt. Auf diese Weise nähert sich das Volumenverhältnis einem Grenzwert an, der dann als „Impulsbetrag“ definiert wird.

Eine erste Gefahr, welche für diese operationale Definition besteht, die durchaus nicht unrealistische Möglichkeit nämlich, dass die Folge der Volumenverhältnisse am Ende gar nicht konvergiert, wird durch Axiom 7 (3.2.3, S. 14) aus der Welt geschafft: Dieses Axiom *fordert* schlicht die Existenz (und Eindeutigkeit) des besagten Grenzwertes. Damit steht also fest, *dass* die Folge der Volumenverhältnisse gegen einen bestimmten Wert strebt, nur ist damit noch nicht geklärt gegen *welchen*. Hermes nennt die so definierte Zahl den „Impulsbetrag“ des betrachteten Materiepunktes, und vom Standpunkt seiner Theorie aus betrachtet handelt es sich dabei zunächst einmal um eine rein *nominale* Definition. Damit kann er sich allerdings nicht zufrieden geben, denn er möchte ja nicht *irgendeine* in sich konsistente Theorie veröffentlichen, sondern eine Theorie der klassischen Mechanik, die zwar nicht hinsichtlich ihres *Aufbaus*, wohl aber hinsichtlich der Gesamtheit aller aus ihr folgenden Theoreme mit den bis dato vorhandenen, allgemein akzeptierten und vielfach experimentell bestätigten herkömmlichen Theoriesystemen übereinstimmt. Und dazu muss natürlich insbesondere auch sein eigener Impulsbetragsbegriff mit den Impulsbetragsbegriffen der traditionellen Darstellungen vereinbar sein.

dass dies so ist, lässt sich allerdings nicht ohne Weiteres ersehen, denn die rein kinematische Definition des Hermes unterscheidet sich von den üblicherweise auf den mechanischen Begriffen „*Masse*“ und „*Kraft*“ beruhenden Definitionen des Impulsbetrages schon recht beträchtlich. Einem in physikalischem Denken Geschulten mag es vielleicht immerhin *plausibel* erscheinen, dass der durch den Grenzprozess einer komplizierten Experimentfolge definierte Ergebniswert tatsächlich mit dem traditionellen Impulsbetrag übereinstimmt; offensichtlich ist dies deswegen aber noch lange nicht. Und für Hermes steht viel auf dem Spiel: Er muss nach Einführung des Impulses erst noch die in anderen Theorien fundamentalen Begriffe der Kraft und Masse definieren, und er wird dies auf der Grundlage des Impulsbegriffes tun, sodass ihm nichts anderes übrig bleibt als nachzuweisen, dass sein Volumenverhältnis-Grenzwert tatsächlich dem Impulsbetrag der Physik-Lehrbücher entspricht.

Nun hat Hermes nach eigener Aussage das Problem, dass ihm nach eigener Aussage kein dem herkömmlichen Aufbau folgendes Axiomensystem der klassischen Mechanik zur Verfügung steht, welches sich hinsichtlich der formalen Strenge seines Aufbaus mit der eigenen Darstellung vergleichen ließe [HE, § 14]. Er kann also nicht einfach damit beginnen, die Äquivalenz beider Impulsbetragsbegriffe in einem solchen Referenz-System mathematisch zu beweisen. Stattdessen ergänzt er sein bisher aufgestelltes Axiomensystem um eine Reihe von zusätzlichen Theoremen, von denen er behauptet, dass diese in der Physik allgemein akzeptiert seien. Das heißt, er schafft sich letztendlich sein eigenes Referenz-System, wobei er sich auf diejenigen Zusatzpostulate (er selbst bezeichnet sie als „*heuristische Prinzipien*“ [HE, S. 24]) beschränkt, die er im angestrebten Äquivalenznachweis benötigen wird.

Hermes Vorgehensweise lässt sich vereinfacht somit wie folgt beschreiben: Er wechselt aus seinem bisherigen Theorierahmen in sein „Simulations“-Axiomensystem einer fertigen Mechanik; insbesondere wird in dieser abgeschlossenen Physik-Theorie natürlich der Gebrauch des *Impulsbegriffes* bereits vollständig geregelt sein. Hermes Definition ist selbstverständlich auch in diesem System formal korrekt, und es wird ihm gelingen nachzuweisen, dass der Grenzwert der Volumenverhältnisse ‘ $\mu(\text{vol}_S^3(H))/\mu(\text{vol}_S^3(G))$ ’ der die beiden m.m.P.e x und u umgebenden Kugeln G und H nicht nur *bloß existiert*, sondern auch mit dem Impulsbetragsverhältnis ‘ $\text{imp}||_{S,u}(x)/\text{imp}||_{S,u}(u)$ ’, welches ja in diesem neuen Axiomensystem wohldefiniert ist, exakt übereinstimmt. Und mit der Festlegung „ $\text{imp}||_{S,u}(u) := 1$ “ (vgl. 3.2.3, S. 14) gilt dann:

$$\lim_{\rho, \delta \rightarrow 0} \frac{\mu(\text{vol}_S^3(H))}{\mu(\text{vol}_S^3(G))} = \text{imp}||_{S,u}(x)$$

Dabei steht ‘ ρ ’ wie gehabt für die Radiusschranke, und ‘ δ ’ bezeichnet die Endschnelligkeitsschranke für die inneren Materiepunkte der Kugeln. Damit wird dann der gewünschte Beweis erbracht sein, immer unter der Voraussetzung wohlgemerkt, dass es sich bei den zusätzlich formulierten Postulaten tatsächlich um übliche Grundannahmen des Physikers handelt.

Wir werden im Rest dieses Abschnittes zunächst auf die Unterschiede zwischen den von Hermes und Essler in deren jeweiliger Arbeit verwendeten Bezeichnungen eingehen, danach werden wir noch einmal die wichtigsten Eigenschaften der operationalen Definition des Impulsbetrages zusammenfassen, und sodann eine grobe Skizze der auf die anschließenden Abschnitte verteilten Beweisführung angeben.

4.1.1 Nomenklatorische Bemerkungen und Vereinbarungen

In ihren jeweiligen Texten verwenden Essler [ES] und Hermes [HE] unterschiedliche Bezeichnungen für gleiche oder ähnliche Dinge. Um dem Leser das Verständnis der Hermeschen Arbeit zu erleichtern, wird auf diese Unterschiede im Einzelnen hingewiesen werden. Wir werden uns dabei nach Möglichkeit auch weiterhin an Esslers Schreibweise orientieren, in einigen wenigen Punkten aber davon abweichen, sofern es der Lesbarkeit und dem Verständnis dient.

Es folgt eine Liste der wichtigsten Unterschiede und Neuerungen; einige weitere werden später im Text an passenderer Stelle genannt werden. Bei den Neueinführungen werden wir, wo immer dies eigentlich angebracht wäre, auf die Nennung des Bezugssystems verzichten, da dieses nicht gewechselt wird. Lediglich bei den ohne Änderung von Essler übernommenen Bezeichnungen führen wir das ‘ S ’ als formal zum Ausdruck gehörend weiterhin mit.

- *m.m.P.e, Ortsvektoren und Zeiten:* Hermes bezeichnet die von Essler mit ‘ x ’ und ‘ u ’ benannten m.m.P.e mit ‘ A_1 ’ und ‘ A_2 ’. Genau genommen bezeichnet er damit eigentlich bestimmte räumliche Punkte, welche relativ zum verwendeten (unbenannten) Bezugssystem zu den entsprechenden (unbenannten) m.m.P.e gehören. Wir werden an der asymmetrischen Bezeichnungsweise von Essler festhalten, und auch weiterhin mit ‘ $ov_S(x)$ ’ den Ortsvektor des m.m.P. x bezeichnen. Den genidentischen Partner x' von x zum Zeitpunkt t werden wir allerdings mit der von Hermes verwendeten kompakteren Schreibweise ‘ $x(t)$ ’ benennen. Dies wird bei Bedarf auch auf andere Objekte kommentarlos übertragen werden, z.B. auf Momentankörper als ‘ $G(t)$ ’.
- *Geschwindigkeiten:* Hermes bezeichnet die Geschwindigkeiten seiner beiden zu vergleichenden m.m.P.e mit ‘ \mathbf{v}_1 ’ und ‘ \mathbf{v}_2 ’. Wir behalten Esslers Bezeichnung ‘ $g\bar{s}_S(x)$ ’ bei.
- *Momentankörper:* Die die m.m.P.e x und u umgebenden Momentankörper G und H nennt Hermes ‘ \underline{K}_1 ’ und ‘ \underline{K}_2 ’. Wir werden sie von jetzt ab ‘ G_x ’ und ‘ G_u ’ nennen.
- *Volumina:* Wir geben dem von Essler mit ‘ $vol_S^3(G)$ ’ bezeichneten räumlichen Volumen des Momentankörpers G den Namen ‘ V_G ’. Das Maß des Volumens werden wir wie Essler mit ‘ $\mu(V_G)$ ’ bezeichnen.

Es sei darauf hingewiesen, dass Hermes, was seine Bezeichnungsweisen betrifft, nicht immer scharf trennt zwischen einem Volumen ‘ V ’ und seinem Maß ‘ $\mu(V)$ ’. So benutzt er z.B. auf S. 26 von [HE] das Volumenintegral ‘ $\int_V i dV$ ’, während er auf der gleichen Seite den Quotienten ‘ $\frac{1}{V}$ ’ verwendet; im zweiten Fall bezeichnet ‘ V ’ offenbar das Maß eines Volumens, im ersten Fall das Volumen selbst. Um welche Kategorie es sich handelt, muss bei Hermes daher oft aus dem Kontext erschlossen werden.¹³

- *Impuls:* Den Impuls eines m.m.P. nennt Hermes ‘ i ’, den Impuls eines *Momentankörpers* nennt er ‘ \mathfrak{J} ’ (vgl. [HE, S. 26]). Indiziert mit Zahlen 1 bis 3 bezeichnen diese Benennungen die *Komponenten des Impulsvektors* entlang der drei räumlichen Ausdehnungen. Die von Essler gewählte Bezeichnung ‘ $imp_{S,u}(x)$ ’ will in diesem Rahmen aus zwei Gründen nicht recht passen: Erstens existiert der durch ‘ $imp_{S,u}(x)$ ’ bezeichnete Impuls an dieser Stelle eigentlich noch gar nicht, sondern es wird vielmehr der “naive“ Impuls der klassischen Physik zu dessen Rechtfertigung angeführt. Zweitens erscheint der Bezug zum m.m.P. u nicht angebracht.

Wir einigen uns hier auf die in der Physik übliche Bezeichnungsweise ‘ \vec{p} ’ mit den Komponenten ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’ und ‘ p_3 ’. Den Impuls eines m.m.P.e x bezeichnen wir mit ‘ $\vec{p}(x)$ ’,

¹³Das gelingt allerdings immer zweifelsfrei!

den eines Momentankörpers G entsprechend mit ‘ $\vec{p}(G)$ ’. Der Impulsbetrag wird einfach mit ‘ $\|\vec{p}\|$ ’ bezeichnet, die Impulsrichtung mit ‘ $\vec{p}/\|\vec{p}\|$ ’.

Wir wollen die Gelegenheit nutzen, eine zusätzliche Schreibkonvention einzuführen. Da wir im weiteren Verlauf der Diskussion noch des öfteren mit Integralausdrücken zu tun haben werden, wollen wir diese von hier ab in einer kompakteren Form aufschreiben. Die in 3.4 formulierte Definition des *Impulskörpers* ($\text{impko}_{S,u}(G)$, Def. 18, S. 16) könnte man demnach auch wie folgt darstellen (hier zunächst noch einmal mit den Esslerschen Impulsbezeichnungen):

$$\text{impko}_{S,u}(G) = \int_{V_G} \text{imp}_{S,u}(iz : \text{ov}_S(z) = \varphi) d\varphi$$

Und solange wir es mit *Momentankörpern* G zu tun haben, die ja hinsichtlich des Bezugssystems S ein eindeutig bestimmtes Volumen V_G besitzen, werden wir folgende abkürzende Schreibweise verwenden:

$$\text{impko}_{S,u}(G) = \int_G \text{imp}_{S,u}(z) dz$$

Man beachte aber, dass diese Schreibweise genau genommen kein Integral im engeren mathematischen Sinne darstellt, da hier nicht über Zahlentypen, sondern über Kollektionen von m.m.P.e „integriert“ wird. Man muss also stets im Hinterkopf behalten, dass es sich hierbei nur um eine *Abkürzung* für den zuvor genannten Ausdruck handelt: Abkürzende Schreibweisen sind immer dann zulässig, wenn man jederzeit unzweideutig den „richtigen“ Ausdruck substituieren kann.

4.1.2 Eigenschaften des Experiments

Wir wiederholen zunächst die wichtigsten Eigenschaften des durch die in 3.2 behandelte operationale Definition des Impulsbetrages idealisierten Experimentes, und die währenddessen vorhandenen physikalischen Gegebenheiten. Für eine einzelne Durchführung des Experimentes gilt:

- Die Radien $rs_S(x)$ und $rs_S(u)$ der beiden x resp. u als Mittelpunkt enthaltenden Kugeln G_x und G_u sind durch eine Konstante $\rho \in \mathbb{R}^+$ beschränkt (Def. 12).¹⁴ Damit sind implizit auch die Volumenmaße $\mu(V_{G_x})$ und $\mu(V_{G_u})$ beschränkt.
- Die Mittelpunkte x und u der Kugeln G_x und G_u bewegen sich frontal aufeinander zu, ihre Geschwindigkeitsvektoren $g\bar{s}_S(x)$ und $g\bar{s}_S(u)$ sind also einander *entgegen gerichtet* (Def. 12).

¹⁴Hermes geht nicht speziell von *Kugeln* aus, sondern betrachtet beliebig geformte Momentankörper und daraus ausgeschnittene Teilmomentankörper, wobei diese formale Verallgemeinerung aber vermutlich keinen fachlichen Vorteil bringen dürfte.

- Der unelastische Zusammenstoß (UeZs_S) besitzt eine Abbremszeit $\tau > 0$, womit eine unstetige Änderung der Geschwindigkeit der beteiligten Materiepunkte vermieden werden soll. Wir bezeichnen in Zukunft den Startzeitpunkt und den Endzeitpunkt in Anlehnung an Hermes Verwendungsweise mit ‘ T ’ resp. ‘ T' ’. Damit gilt also $\tau = T' - T$.¹⁵
- Zum Startzeitpunkt T des Zusammenstoßes gilt $g\bar{s}_S(x) \neq \vec{0} \neq g\bar{s}_S(u)$.
- Während des Zusammenstoßes sind die Gesamtsysteme $G_x(t) \cup G_u(t)$, für $t \in [T, T']$, θ -isoliert ($G_x(t) \cup G_u(t) \in \text{Isol}_{S,\theta}$). Es können dabei immer noch äußere Kräfte nicht-kinematischer Art auf diese Systeme wirken, aber eben in kontrolliertem Grad: Die θ -Isoliertheit wird uns später gewisse mathematische Abschätzungen bzgl. der Stärke dieser äußeren Einflüsse ermöglichen.
- Nach dem Abbremsvorgang des Zusammenstoßes ($t > T'$) ruht das Gesamtsystem $G_x(t) \cup G_u(t)$ nicht in vollem Maße, aber von den Schnelligkeiten $\|g\bar{s}_S(z)\|$ aller m.m.P.e $z \in G_x(t) \cup G_u(t)$ verlangen wir, dass sie kleiner als eine Schranke δ sind.¹⁶

Alle diese Eigenschaften gelten für *eine* Durchführung des Experiments. Die Idee in 3.2.3 war nun, dass eine Verbesserung der Übereinstimmung zwischen dem gemessenen Volumenverhältnis $\hat{\xi} := \mu(V_{G_u})/\mu(V_{G_x})$ und dem tatsächlichen „theoretischen“ Wert ξ dadurch erreicht wird, dass in weiteren Versuchsdurchführungen

- die Homogenität der Materieverteilung in den beiden Kugeln erhöht wird durch das *Verkleinern der Radiusschranke ρ* , und
- die Restgeschwindigkeiten der m.m.P.e in den Kugeln verringert werden durch *Ab-senkung der Schnelligkeitsschranke δ* .

4.1.3 Skizze der Hermesschen Vorgehensweise

Wir geben einen groben Überblick über den in den folgenden Abschnitten gelieferten Beweis unserer „Zielgleichung“

$$\lim_{\rho, \delta \rightarrow 0} \frac{\mu(V_{G_u(T)})}{\mu(V_{G_x(T)})} = \frac{\|\vec{p}(x(T))\|}{\|\vec{p}(u(T))\|} \quad (4)$$

¹⁵Essler benennt diese beiden Zeitpunkte nicht explizit. Hermes verwendet als Bezeichnungen ‘ τ ’ und ‘ τ' ’ [HE, S. 28], was bei uns offensichtlich zu Namenskonflikten führen würde.

¹⁶Essler führt in diesem Zusammenhang eine zusätzliche Bezeichnung ‘ σ ’ ein, welche die *Mindestdauer* der „Ruhe“ des Gesamtsystems nach beendeter Kollision bezeichnet (bei Essler in dessen Version der Definition des Volumenverhältnisses, D_{3.5}^{hm}; bei uns in der Definition des unelastischen Zusammenstoßes, Def. 12, S. 10). Hermes hingegen fordert in seinen entsprechenden Definitionen (D8.1 und D8.2 in [HE, § 8]) lediglich, dass sich das Gesamtsystem nach dem unelastischen Zusammenstoß (weitgehend) in Ruhe befindet; über die Zeitdauer macht er keine Angaben. Daher ist wohl davon auszugehen, dass der von Hermes durch das Intervall ‘ $[\tau, \tau']$ ’ bezeichnete Zeitraum nur mit dem in Esslers Definition des unelastischen Zusammenstoßes (Def. 12, S. 10) durch ‘ τ ’ gekennzeichneten Zeitraum übereinstimmt, und nicht mit dem „Gesamtzeitraum“ $\tau + \sigma$.

den wir unter Hinzunahme bestimmter Zusatzannahmen zu unseren bisherigen Axiomen durchführen werden. Wir werden bei allen diesen *Postulaten* einen Verweis auf die entsprechenden in [HE] auftretenden „heuristischen Prinzipien“ ‘hi’ anfügen. Unsere Basisvoraussetzung wird dabei sein, dass der Impuls \vec{p} bereits für m.m.P.e und Körper definiert ist:

Postulat 1 (Impuls [h1,h2]). *Jedem gewöhnlichen Punkt $z \in \mathbb{G}$ kommt eindeutig ein Impulsvektor $\vec{p}(z)$ zu, und für jeden Momentankörper G existiert das Integral $\vec{p}(G) = \int_G \vec{p}(z) dz$ über die Impulsvektoren seiner Elemente.*¹⁷

Der Ausgangspunkt unserer Erörterung wird alsdann der *Impulserhaltungssatz* der klassischen Mechanik sein:

Postulat 2 (Impulserhaltungssatz (IES) [h11]).

$$\vec{p}(G_{x(T)}) + \vec{p}(G_{u(T)}) + \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt = \vec{p}(G_{x(T')}) + \vec{p}(G_{u(T')})$$

Dieser grundlegende physikalische Lehrsatz beschreibt nämlich *jedes* kinematische System in abstrakter Weise, und damit beschreibt er insbesondere auch *unser* Experiment. Bei uns bezeichnen ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T)})$ ’ die Impulse der Kugeln *zu Beginn*, ‘ $\vec{p}(G_{x(T')})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T')})$ ’ die Kugel-Impulse *nach* dem Zusammenstoß, und ‘ $\int_T^{T'} \vec{F}(t) dt$ ’ den während der Zeit $[T, T']$ des Zusammenstoßes auftretenden *Kraftstoß* (‘ \vec{F} ’ steht wie in der Physik üblich für den *Kraftvektor*). Die fünf im IES auftretenden Terme – vier Impulse kompletter Momentankörper, zwei davon zudem zu einem vom Moment T des Zusammenstoßes verschiedenen Zeitpunkt T' , und ein Kraftintegral – scheinen bei oberflächlicher Betrachtung nicht viel mit unserer Fragestellung zu tun zu haben. Indem wir aber nach und nach die spezifischen Eigenschaften des Experimentes (vgl. 4.1.2) benutzen, wird es uns gelingen, aus dem ursprünglich allgemein gültigen Satz eine sehr spezifische mathematische Beziehung zu erhalten, die in der Hauptsache durch die für uns interessanten Ausdrücke ‘ $\|\vec{p}(x(T))\|$ ’, ‘ $\|\vec{p}(u(T))\|$ ’, ‘ $\mu(V_{G_{x(T)}})$ ’ und ‘ $\mu(V_{G_{u(T)}})$ ’, wie sie im Grenzwertausdruck (4) auftreten, bestimmt ist.

In 4.2 werden wir die Terme ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T)})$ ’ zum Zeitpunkt T des Zusammenstoßes betragsmäßig nach oben abschätzen. Wir werden dazu gewisse Annahmen über die Eigenschaften der Impulsdichte von Körpern treffen (*Lipschitzstetigkeit* und *Randstetigkeit*), wobei uns der Übergang von *Körperimpulsen* zu *Punktimpulsen* über den *Mittelwertsatz* der Analysis gelingen wird. Neben den für uns relevanten Ausdrücken wird in der Abschätzung ein zusätzlicher unerwünschter Term auftreten, dessen wichtigste Komponente allerdings die *Radiusschranke* ρ sein wird, welche ja in den späteren Wiederholungen des Experiments gegen 0 strebt.

In 4.3 werden wir auch für die beiden anderen Körperimpulse ‘ $\vec{p}(G_{x(T')})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T')})$ ’ des IES Abschätzungen finden. Diese beiden Terme beschreiben das System *nach* dem

¹⁷Der Leser beachte die Konventionen zu Integralausdrücken in 4.1.1, S. 20.

Zusammenstoß, und entsprechend werden die Abschätzungen die ebenfalls später gegen 0 strebende *Geschwindigkeitsschranke* δ als Teilausdruck enthalten.

In 4.4 wenden wir uns dann dem Ausdruck ‘ $\int_T^{T'} \vec{F}(t) dt$ ’ zu. Es wird sich zeigen, dass wir die Größe des Kraftstoßbetrags durch eine immer stärkere Isolierung θ des Experiments von äußeren Krafteinflüssen im Prinzip beliebig reduzieren können. Als Konsequenz hieraus wird sich eine mathematische Beziehung zwischen den oben genannten vier Termen ergeben, die gänzlich unabhängig sein wird vom Betrag des Kraftstoßes.

Daraus wird sich dann in 4.5 zwischen den Verhältnissen der Volumina und der Impulsbeträge die gewünschte Grenzwertbeziehung ergeben, nachdem das Experiment gedanklich für immer kleinere Kugeln und Endschnelligkeiten wiederholt wurde.

4.2 Abschätzung der *Anfangs-Impulsbeträge* ‘ $\|\vec{p}(G_{x/u(T)})\|$ ’

In diesem Abschnitt werden die Beträge der beiden ersten Terme des IES, namentlich ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T)})$ ’, zum Startzeitpunkt T des unelastischen Zusammenstoßes abgeschätzt. Hierzu müssen wir zu Beginn einige physikalische Gesetze postulieren. Wir fordern über die reine Existenz des Körperimpulses $\vec{p}(G)$ hinausgehend, dass die Impulsdichte $\vec{p}(\cdot)$ eines Momentankörpers G einen gewissen Grad an „Homogenität“ in Form von *Randstetigkeit* und *Lipschitzstetigkeit* besitzt:

Postulat 3 (Randstetigkeit [h3]). *Die Impulsdichte $\vec{p}(G)$ eines Momentankörpers G ist randstetig gemäß Def. 19 (S. 16) über dem Volumen V_G .*

Postulat 4 (Lipschitzstetigkeit [h4]). *Für einen Momentankörper G gilt für jedes Paar y, z von in G enthaltenen m.m.P.e die Lipschitzbedingung*

$$\|\vec{p}(y) - \vec{p}(z)\| \leq \lambda_G \cdot \|\text{ov}_S(y) - \text{ov}_S(z)\|$$

mit einer nur von G abhängigen Konstanten $\lambda_G \in \mathbb{R}^+$.¹⁸

4.2.1 Reformulierung der Körperimpulsausdrücke

Wir möchten den *Körperimpuls* ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ (‘ $\vec{p}(G_{u(T)})$ ’) durch einen Ausdruck darstellen, der nach Möglichkeit nur noch aus dem *Momentanpunktimpuls* ‘ $\vec{p}(x(T))$ ’ (‘ $\vec{p}(u(T))$ ’) und dem Volumenmaß ‘ $\mu(V_{G_{x(T)}})$ ’ (‘ $\mu(V_{G_{u(T)}})$ ’) des Körpers besteht, denn nur aus diesen Entitäten besteht unsere Zielgleichung. Wir nähern uns diesem Ziel für ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ wie folgt, wobei wir überall auf die Angabe des stets gleichen Zeitwertes ‘ T ’ verzichten werden. Der Körperimpuls ‘ $\vec{p}(G_{x(T)})$ ’ lässt sich mit dieser Vereinbarung schreiben als

$$\vec{p}(G_x) = \int_{G_x} \vec{p}(z) dz = \int_{G_x} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} (z) dz = \begin{pmatrix} \int_{G_x} p_1(z) dz \\ \int_{G_x} p_2(z) dz \\ \int_{G_x} p_3(z) dz \end{pmatrix} \quad (5)$$

¹⁸ Hermes schreibt die Lipschitzkonstante manchmal als ‘ M ’ und dann auch wieder als ‘ H_j ’. Er verwendet sie im weiteren Verlauf von § 7 nicht direkt, sondern „verpackt“ in dem Ausdruck ‘ $H(K)$ ’ (vgl. [HE, S. 26]).

Dabei ergibt sich die linke Gleichung aus Postulat 1, welches den Körperimpuls als Integral in der dargestellten Form angibt. Für die mittlere Gleichung erinnern wir uns an die Konvention aus 4.1.1, S. 19, nach der $\vec{p}(\cdot)$ aus den drei reellwertigen Komponenten $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ und $p_3(\cdot)$ besteht. Die rechte Gleichung ist einfach die Definition für *vektorwertige* Integrale: Das Integral $I := \int_D f(\varphi) d\varphi$ einer vektorwertigen Dichtefunktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $f := \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, ist definiert als der Vektor $\langle I_1, \dots, I_m \rangle$ der einzelnen Komponentenintegrale $I_i := \int_D f_i(\varphi) d\varphi$ [A2].

Wir möchten die Integrale beseitigen und stattdessen Ausdrücke in ‘ $\mu(V_{G_x})$ ’ und ‘ $p_i(x)$ ’, $i \in \{1, 2, 3\}$, erhalten. Diesem Ziel bringt uns der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* näher. Im Eindimensionalen gilt für eine über einem *offenen* und *beschränkten* Intervall ‘ (a, b) ’ *integrierbare* Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die über dem *abgeschlossenen* Intervall ‘ $[a, b]$ ’ sogar *stetig* ist, die also *randstetig* ist für (a, b) , der folgende *Mittelwertsatz*:

$$\forall \varphi^* \in (a, b) : \int_a^b f(t) dt = |b - a| \cdot f(\varphi^*) \quad (\text{Mittelwertsatz})$$

Es gibt also eine Stelle φ^* im offenen Intervall (a, b) , deren Funktionswert multipliziert mit der Intervalllänge gerade dem Wert des Integrals entspricht [A1]. Hermes erweitert diesen Satz nun auf den mehrdimensionalen Fall: Gemäß Postulat 1 ist die Impulsdichte \vec{p} , und damit auch jede ihrer Komponenten p_i , *integrierbar* über dem (*offenen* und *beschränkten*, s. Def. 3) Volumen V_{G_x} . Und Postulat 3 liefert uns die *Randstetigkeit* von p_i über V_{G_x} , sodass sich der Mittelwertsatz auf unsere Situation wie folgt übertragen lässt:¹⁹

$$\forall z_i \in G_x : \int_{G_x} p_i(z) dz = \mu(V_{G_x}) \cdot p_i(z_i) \quad (6)$$

Damit lässt sich der Körperimpuls nun schreiben als:

$$\vec{p}(G_x) = \begin{pmatrix} \int_{G_x} p_1(z) dz \\ \int_{G_x} p_2(z) dz \\ \int_{G_x} p_3(z) dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(V_{G_x}) \cdot p_1(z_1) \\ \mu(V_{G_x}) \cdot p_2(z_2) \\ \mu(V_{G_x}) \cdot p_3(z_3) \end{pmatrix} = \mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) \\ p_2(z_2) \\ p_3(z_3) \end{pmatrix} \quad (7)$$

wobei wir daran erinnern, dass sich Konstanten aus Vektoren herausziehen lassen [LA]:

$$\langle c \cdot \psi_1, \dots, c \cdot \psi_n \rangle = c \cdot \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$$

¹⁹ Hermes setzt zur Anwendung des Mittelwertsatzes sogar nur die reine Integrierbarkeit aus Postulat 1 voraus [HE, S. 26]. Aber bereits im eindimensionalen Fall ist ohne die zusätzlich geforderte Stetigkeit des Integranden die Existenz einer Zwischenstelle $\varphi^* \in (a, b)$ mit der genannten Eigenschaft nicht garantiert: Für die über $(0, 1)$ gegebene Funktion f , definiert durch $f(t) := 1$ über $(0, \frac{1}{2})$ und 0 sonst, gibt es offensichtlich keine Stelle $\varphi^* \in (0, 1)$ mit $f(\varphi^*) = |1 - 0| \cdot f(\varphi^*) = \int_0^1 f(t) dt = 1/2$. Aber im mehrdimensionalen Fall liefert auch die Randstetigkeit noch lange keinen Mittelwertsatz im Stil der hier vorgestellten eindimensionalen Variante, zumal wir in unserem Fall nicht über mehrdimensionale *Intervalle*, sondern über *beliebige Volumina* gemäß Def. 3, S. 5, integrieren. Bekannt ist [A2], dass für Funktionen, die über *jordanmessbaren* Mengen, wie wir sie in der Diskussion zu 3.4, S. 16, kennen gelernt haben, integrierbar sind, eine Art von Mittelwertsatz gilt, der aber ebenfalls keine Stelle aus der Menge selbst liefert, sondern lediglich eine Abschätzung des Integrals ausgedrückt über das Infimum und das Supremum der Funktion. Die Situation bleibt also unbefriedigend.

Leider sagt der Mittelwertsatz nichts über die genaue Position der $\varphi^{(i)} := \text{ov}_S(z_i)$ in V_{G_x} aus, und daher müssen wir damit rechnen, dass die z_i verschieden sind von unserem Referenzpunkt x . Es ist sogar möglich, dass z_1, z_2 und z_3 paarweise voneinander verschieden sind, da der Mittelwertsatz für jedes Komponentenintegral eine eigene Stelle $\varphi^{(i)} \in V_{G_x}$ liefert. Um dennoch einen Ausdruck in ' $\vec{p}(x)$ ' zu erhalten, formulieren wir den Vektor aus (7) folgendermaßen um:

$$\begin{pmatrix} p_1(z_1) \\ p_2(z_2) \\ p_3(z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(z_1) + [p_1(x) - p_1(x)] \\ p_2(z_2) + [p_2(x) - p_2(x)] \\ p_3(z_3) + [p_3(x) - p_3(x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ p_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Wir haben hier den Wert $p_i(z_i) - p_i(x) = 0$ zu jeder Vektorkomponente addiert, und danach zwei Vektoren durch additives auseinander Ziehen gebildet. Es ergibt sich damit aus (7) und (8) für den Körperimpuls $\vec{p}(G_x)$ folgende neue Darstellung:

$$\vec{p}(G_x) = \mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x) + \mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Diese Darstellung besteht wie gewünscht lediglich aus den Ausdrücken ' $\mu(V_{G_x})$ ' und ' $\vec{p}(x)$ ', sowie einem zusätzlichen Summanden, der aber immerhin ebenfalls aus Momentanpunktimpulsen und dem Volumenmaß ' $\mu(V_{G_x})$ ' besteht. Eine analoge Rechnung ergibt sich für den zweiten Körperimpuls ' $\vec{p}(G_u)$ '. Wir werden in den beiden folgenden Abschnitten sehen, dass wir den zweiten Summanden in den Griff bekommen können.

4.2.2 Eine Abschätzung für den Betrag des Körperimpulses

Wir können nun eine geeignete Abschätzung für die *Beträge* der Körperimpulse ' $\vec{p}(G_{x(T)})$ ' und ' $\vec{p}(G_{u(T)})$ ' angeben:

Abschätzung 1. *Für den m.m.P. $x(T)$ und die ihn umgebende Kugel $G_{x(T)}$ zu Beginn T des Kraftstoßes gilt*

$$\|\vec{p}(G_{x(T)})\| \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| + \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3}$$

mit der für $G_{x(T)}$ geltenden Lipschitzkonstante $\lambda_{G_{x(T)}}$ und der Radiusschranke ρ .²⁰ Die analoge Beziehung gilt für $\|\vec{p}(G_{u(T)})\|$.

Diese Ungleichung besagt also, dass sich der Körperimpulsbetrag ' $\|\vec{p}(G_{x(T)})\|$ ' maßgeblich durch das Produkt aus Volumenmaß der Kugel $G_{x(T)}$ und Impulsbetrag des m.m.P. $x(T)$ abschätzen lässt, ergänzt um einen weiteren Term ' $\mu(V_{G_{x(T)}})\rho\lambda_{G_{x(T)}}\sqrt{3}$ '. Dieser zweite Summand der Schranke enthält, abgesehen von der unbedenklichen Zahlenkonstante ' $\sqrt{3}$ '

²⁰ Hermes bezeichnet sein Analogon zu ' ρ ', die Schranke für den Durchmesser eines Körper K , mit ' $f(\delta)$ ' (vgl. [HE, S. 26]). Für die beiden zu vergleichenden Körper K_1 und K_2 verwendet er aber ab S. 28 die Schranken ' $f_1(\delta)$ ' und ' $f_2(\delta)$ ', während er auf S. 29 die Bezeichnung ' $f(\delta)$ ' für die maximal zulässige *Schnelligkeit* (bei uns ' δ ') neu vergibt.

(sie wird sich aus beweistechnischen Gründen ergeben), die beiden uns vertrauten Größen Kugelradiuschranke ‘ ρ ’ (für beide Kugeln) sowie Volumenmaß ‘ $\mu(V_{G_x(T)})$ ’ – beide werden bei den späteren Versuchswiederholungen in 4.5 gemeinsam gegen 0 konvergieren. Ferner tritt hier die Lipschitzkonstante ‘ $\lambda_{G_x(T)}$ ’ aus Postulat 4 auf. Die Lipschitzbedingung wurde als eine *globale* Eigenschaft des gesamten Momentankörpers G postuliert, d.h. sie gilt für beliebige Paare von m.m.P.e $y, z \in G$. Als Konsequenz ergibt sich daraus, dass λ_G auch Lipschitzkonstante für jede *Teilkugel* $G' \subseteq G$ ist, was faktisch darauf hinausläuft, dass $\lambda_{G_x(T)}$ hinsichtlich der Grenzwertbildung für ρ , wie sie in 4.5 durchgeführt werden wird, eine *Konstante* darstellt. Von diesem Ausdruck wird also keine Gefährdung unseres Vorhabens zu erwarten sein.

Beweis der Abschätzung 1. Der Beweis erfolgt hier für ‘ $x(T)$ ’, für ‘ $u(T)$ ’ ist er analog durchzuführen. Wir werden auch hier wieder überall auf die Angabe des immer gleichen Zeitpunktes ‘ T ’ verzichten. Basierend auf (9) aus 4.2.1 erhalten wir als erste Abschätzung für den *Betrag* des Körperimpulses ‘ $\vec{p}(G_x)$ ’:

$$\begin{aligned} \|\vec{p}(G_x)\| &= \|\mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x) + \mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix}\| \\ &\leq \|\mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x)\| + \|\mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix}\| \\ &= \mu(V_{G_x}) \cdot \|\vec{p}(x)\| + \mu(V_{G_x}) \cdot \left\| \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (10)$$

Die erste Zeile stellt (9) nach beidseitiger Normierung dar. Die Ungleichung in der zweiten Zeile erhalten wir durch Anwendung der *Dreiecksungleichung für Vektornormen* [LA], welche allgemein besagt, dass für Vektoren $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (11)$$

Die dritte Zeile entsteht mit dem Wissen, dass man Konstanten $c \in \mathbb{R}$ *betragsmäßig* aus der Norm eines Vektors ψ herausziehen kann [LA],

$$\|c \cdot \psi\| = |c| \cdot \|\psi\|$$

In unserem Fall gilt dabei $|\mu(V_{G_x})| = \mu(V_{G_x})$, wegen $\mu(V_{G_x}) \geq 0$.

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit auf den Ausdruck ‘ $\|\langle \dots, p_i(z_i) - p_i(x), \dots \rangle\|$ ’ in (10). Über die in (6) durch den Mittelwertsatz gewonnenen m.m.P.e $z_i, i \in \{1, 2, 3\}$, wissen wir lediglich, dass sich ihre Ortsvektoren $\varphi^{(i)} := \text{ov}_S(z_i)$ *irgendwo* innerhalb von V_{G_x} befinden; in aller Regel werden sie nicht mit dem Punkt x übereinstimmen, sodass der Vektor im zweiten Summand von (10) voraussichtlich *verschieden* von $\vec{0}$ sein wird. Wir können aber über die mit Postulat 4 geforderte *Lipschitzstetigkeit* eine Beziehung herstellen zwischen $\text{ov}_S(x)$ und den $\varphi^{(i)}$. Es gilt nämlich:

$$p_i(z_i) - p_i(x) \leq \|\vec{p}(z_i) - \vec{p}(x)\| \leq \lambda_{G_x} \cdot \|\text{ov}_S(z_i) - \text{ov}_S(x)\| \leq \lambda_{G_x} \cdot \rho \quad (12)$$

Die erste Ungleichung ergibt sich, weil allgemein für Vektoren $\psi := \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ gilt, dass $\psi_i^2 \leq \sum_{k=1}^n \psi_k^2 = \|\psi\|^2$, wobei man auf beiden Seiten dieser Ungleichung noch die Wurzel ziehen muss. Die zweite Ungleichung in (12) folgt unmittelbar aus Postulat 4, wobei λ_{G_x} die für G_x geltende Lipschitzkonstante darstellt. Die dritte Ungleichung gilt, weil der Radius des Volumens V_{G_x} , in dem sowohl $ov_S(x)$ als auch $ov_S(z_i)$ liegt, nach Experimentvorschrift kleiner als ρ ist und $ov_S(x)$ den *Kugelmittelpunkt* darstellt.

Die linke Seite von (12) stimmt offenbar mit den Komponenten des „Schmutzvektors“ aus (10) überein, dessen Betrag wir damit wie folgt abschätzen können:

$$\left\| \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 [p_k(z_k) - p_k(x)]^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^3 [\lambda_{G_x} \cdot \rho]^2} = \lambda_{G_x} \cdot \rho \cdot \sqrt{3} \quad (13)$$

Die erste Gleichung nutzt lediglich die Definition der euklidischen Norm (1) (S. 6). Im zweiten Schritt wenden wir (12) auf die Summanden in dem Wurzelausdruck an. Die dadurch entstehenden – vom Summationsindex ‘ k ’ unabhängigen – Faktoren ‘ λ_{G_x} ’ und ‘ ρ ’ können wir im letzten Schritt vor die Wurzel bringen, sodass unter der Wurzel nur noch die Konstante $\sum_{k=1}^3 1 = 3$ steht.

Wir setzen nun (13) in (10) ein, und erhalten eine Abschätzung, welche die zu beweisende Form besitzt. \square

4.2.3 Anwendung des Impulserhaltungssatzes

Wir können Abschätzung 1 der beiden Terme ‘ $\|\vec{p}(G_{x(T)})\|$ ’ und ‘ $\|\vec{p}(G_{u(T)})\|$ ’ nun in den IES, wie er in Postulat 2 formuliert wurde, einsetzen und erhalten das

Zwischenresultat 1. *Es gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} \\ & \quad + \|\vec{p}(G_{x(T')})\| + \|\vec{p}(G_{u(T')})\| + \left\| \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \vec{p}(G_{x(T')}) + \vec{p}(G_{u(T')}) - \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \\ & = \vec{p}(G_{x(T)}) + \vec{p}(G_{u(T)}) \\ & = \left[\mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x) + \mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \right] + \left[\mu(V_{G_u}) \cdot \vec{p}(u) + \mu(V_{G_u}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(u) \\ p_2(z_2) - p_2(u) \\ p_3(z_3) - p_3(u) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Die erste Gleichung stellt den IES dar, aufgelöst nach der Summe der beiden uns interessierenden Körperimpulse, welche wir in der zweiten Gleichung durch die zuvor gewonnene

Darstellung (9) ersetzen. Die Körperimpuls-Ausdrücke selbst (mittlerer Term) werden damit irrelevant, und nach Umstellung der Teilausdrücke des linken und rechten Terms ergibt sich aus obiger Gleichung folgende äquivalente Form:

$$\begin{aligned} & \mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x) + \mu(V_{G_u}) \cdot \vec{p}(u) \\ &= -\mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} - \mu(V_{G_u}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(u) \\ p_2(z_2) - p_2(u) \\ p_3(z_3) - p_3(u) \end{pmatrix} \\ & \quad + \vec{p}(G_{x(T')}) + \vec{p}(G_{u(T')}) - \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \end{aligned}$$

Bei einer Gleichung darf man beide Seiten normieren:

$$\begin{aligned} & \|\mu(V_{G_x}) \cdot \vec{p}(x) + \mu(V_{G_u}) \cdot \vec{p}(u)\| \\ &= \left\| -\mu(V_{G_x}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} - \mu(V_{G_u}) \cdot \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(u) \\ p_2(z_2) - p_2(u) \\ p_3(z_3) - p_3(u) \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \vec{p}(G_{x(T')}) + \vec{p}(G_{u(T')}) - \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \right\| \\ & \leq \mu(V_{G_x}) \cdot \left\| \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(x) \\ p_2(z_2) - p_2(x) \\ p_3(z_3) - p_3(x) \end{pmatrix} \right\| + \mu(V_{G_u}) \cdot \left\| \begin{pmatrix} p_1(z_1) - p_1(u) \\ p_2(z_2) - p_2(u) \\ p_3(z_3) - p_3(u) \end{pmatrix} \right\| \\ & \quad + \|\vec{p}(G_{x(T')})\| + \|\vec{p}(G_{u(T')})\| + \left\| \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \right\| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} \\ & \quad + \|\vec{p}(G_{x(T')})\| + \|\vec{p}(G_{u(T')})\| + \left\| \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned} \tag{14}$$

Im zweiten Schritt wurde die Dreiecksungleichung (11) auf die rechte Seite angewandt (dies beseitigt auch die Minuszeichen), und es wurden die (positiven) Volumenmaße vor die Normstriche gebracht. Im dritten Schritt wurde Abschätzung (13) aus dem Beweis zu Abschätzung 1 (4.2.2) verwendet.

Die rechte Seite dieser Ungleichung entspricht bereits der rechten Seite des zu beweisenden Zwischenresultats. Die linke Seite enthält ein '+' anstelle eines '-'. Wir erinnern uns aber daran, dass laut Experimentvorschrift die Impulse der zu vergleichenden m.m.P.e $x(T)$ und $u(T)$ *entgegen gerichtet* sind, d.h. es gilt:

$$\vec{p}(u(T)) = \|\vec{p}(u(T))\| \cdot (-1) \cdot \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \tag{15}$$

wobei wir, wie wir dies in 4.1.1, S. 19, vereinbart hatten, den Impuls in seinen Betrag ' $\|\vec{p}(\cdot)\|$ ' und seinen Richtungsvektor ' $\vec{p}(\cdot)/\|\vec{p}(\cdot)\|$ ' aufgespalten haben, d.h. der Impuls von u hat den *Betrag* von u , sein *Richtungsvektor* entspricht aber demjenigen von x mit umgekehrtem Vorzeichen. Mit dieser Beobachtung können wir die linke Seite von (14) wie folgt

aufschreiben:

$$\begin{aligned}
& \|\mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \vec{p}(x(T)) + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \vec{p}(u(T))\| \\
&= \left\| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \left[\|\vec{p}(x(T))\| \cdot \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right] + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \left[\|\vec{p}(u(T))\| \cdot (-1) \cdot \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right] \right\| \\
&= \left\| \left[\mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right] \cdot \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right\| \\
&= \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \cdot \left\| \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right\|
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt setzen wir die Beobachtung aus (15) ein, zusätzlich stellen wir auch ‘ $\vec{p}(x(T))$ ’ als Produkt aus Betrag und Richtung dar. Wir können nun im zweiten Schritt den beiden Summanden gemeinsamen Vektor ‘ $\vec{p}(x(T))/\|\vec{p}(x(T))\|$ ’ distributiv aus der Summe herausziehen. Und weil die verbleibende Summe nur noch aus *Skalaren* besteht, können wir sie im dritten Schritt *betragsmäßig* vor die Normierungsstriche bringen.

In der letzten Zeile steht nun die linke Seite der zu beweisenden Ungleichung, multipliziert mit ‘ $\|\frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|}\|$ ’. Es ist aber

$$\left\| \frac{\vec{p}(x(T))}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{p}(x(T))\|} \right| \cdot \|\vec{p}(x(T))\| = \frac{\|\vec{p}(x(T))\|}{\|\vec{p}(x(T))\|} = 1$$

womit dieser Term wegfällt und das Zwischenresultat bewiesen ist. \square

Wir sind mit diesem ersten Zwischenergebnis unserem in 4.1.3 formulierten Ziel ein Stück näher gekommen: Die Terme ‘ $\mu(V_{G_{x(T)}})\rho\lambda_{G_{x(T)}}\sqrt{3}$ ’ und ‘ $\mu(V_{G_{u(T)}})\rho\lambda_{G_{u(T)}}\sqrt{3}$ ’ werden wir, wie bereits antizipiert wurde, mathematisch-physikalisch in den Griff bekommen. Auch die restlichen aus dem IES verbliebenen Summanden der rechten Seite gilt es noch in brauchbarer Weise abzuschätzen, was in den nun folgenden beiden Abschnitten geschehen wird.

4.3 Abschätzung der „Ruhe“-Impulsbeträge ‘ $\|\vec{p}(G_{x/u(T')})\|$ ’

Für die Abschätzung der Vektornormen der IES-Terme ‘ $\vec{p}(G_{x(T')})$ ’ und ‘ $\vec{p}(G_{u(T')})$ ’ am Schlusszeitpunkt T' des unelastischen Zusammenstoßes muss auf die physikalische Größe „Masse“ zurückgegriffen werden. In Hermes Theorie wird die Masse erst *nach* Einführung des Impulses eingeführt (§ 12 in [HE] bzw. Abschnitt 16 in [ES]), sodass wir den Massebegriff hier zunächst bestimmen müssen. Dazu stellen wir zunächst die aus der Physik bekannte Proportionalitätsbeziehung zwischen Geschwindigkeit und Impuls her:

Postulat 5 (Impulsrichtung [h5]). *Der Impulsvektor $\vec{p}(z)$ eines m.m.P. $z \in \mathbb{G}_S^{\neq 0}$ ist proportional zu dessen Geschwindigkeitsvektor $g\bar{s}_S(z)$, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass $\vec{p}(z) = c \cdot g\bar{s}_S(z)$.*

Diese Forderung entspricht Def 11 der Impulsrichtung in 3.1 (S. 8). Dabei bezeichnet ‘ $G_S^{\neq \vec{0}}$ ’ diejenigen gewöhnlichen Punkte, welche bezogen auf das Bezugssystem S eine von $\vec{0}$ verschiedene Geschwindigkeit besitzen.

Die Proportionalitätskonstante c aus Postulat 5 stellt nun die Grundlage für die Definition der Massendichte dar. Denn wegen $\vec{p}(z) = c \cdot g\bar{s}_S(z)$ gilt

$$\|\vec{p}(z)\| = \|c \cdot g\bar{s}_S(z)\| = |c| \cdot \|g\bar{s}_S(z)\| = c \cdot \|g\bar{s}_S(z)\|$$

Letztere Gleichung folgt dabei aus $c \in \mathbb{R}^+$. Somit ist der Quotient $c = \|\vec{p}(z)\|/\|g\bar{s}_S(z)\|$ wohldefiniert für $g\bar{s}_S(z) \neq \vec{0}$.

Postulat 6 (Masse [h6]). *Mit der Massendichtefunktion*

$$m(z) := \begin{cases} 0 & : \text{für } g\bar{s}_S(z) = \vec{0} \\ \|\vec{p}(z)\|/\|g\bar{s}_S(z)\| & : \text{sonst} \end{cases}$$

existiert für jeden Momentankörper G eindeutig bestimmt die Masse

$$m(G) := \int_G m(z) dz$$

Von den genidentischen Partnern $G(t)$ eines Momentankörpers G müssen wir noch die physikalische Gegebenheit verlangen, dass deren Massen nicht beliebig große Werte annehmen können, d.h. wir wollen es u.a. nicht erlauben, dass ein Körper zu irgend einem Zeitpunkt seiner Existenz eine unendliche und damit physikalisch sinnlose Masse besitzt, oder dass er auch nur mit zunehmendem Alter unbeschränkt an Gewicht zunimmt.

Postulat 7 (Massenbeschränkung [h6]). *Es sei*

$$M(G) := \{m(G') \mid G' \in \text{MoKo}_S \wedge \langle G', G \rangle \in \text{GnIdKo}_S\}$$

die Menge aller Massen genidentischer Partner G' eines Momentankörpers G . Es gilt: $M(G)$ besitzt ein Supremum $g_G := \sup(M(G))$.²¹

Unter diesen Voraussetzungen können wir nun die gewünschte Abschätzung bereitstellen:

Abschätzung 2. *Für den m.m.P. $x(T')$ und die sie umgebende Kugel $G_{x(T')}$ zum Endzeitpunkt T' des Kraftstoßes gilt*

$$\|\vec{p}(G_{x(T')})\| \leq \delta \cdot g_{G_{x(T)}}$$

mit dem für $G_{x(T)}$ zum Startzeitpunkt T geltenden Massensupremum $g_{G_{x(T)}}$ und der Schnelligkeitsschranke δ .²² Die analoge Beziehung gilt für $\|\vec{p}(G_{u(T')})\|$.

²¹Hermes schreibt das Supremum als ‘ $g(K_{1/2})$ ’ (vgl. [HE, S. 27]).

²² Hermes bezeichnet die Schnelligkeitsschranke mit ‘ $f(\delta)$ ’ (vgl. [HE, S. 29]), nach dem er diesen Ausdruck ursprünglich auf S. 26 als *Durchmesserschranke* (bei uns ‘ ρ ’) eingeführt hatte. Er bezeichnet allerdings ab S. 28 die Durchmesserschranken für die Körper K_1 und K_2 mit ‘ $f_1(\delta)$ ’ und ‘ $f_2(\delta)$ ’, sodass es nicht zu Konflikten kommt.

Hier wird also der zweite später zu verkleinernde Parameter, die Geschwindigkeits-
 schranke ‘ δ ’ für die m.m.P.e der beiden Kugeln *nach* dem Zusammenstoß, verwendet. Au-
 ßerdem tritt die zuvor postulierte Massenschranke ‘ $g_{G_{x(T)}}$ ’ für die Kugel $G_{x(T)}$ zum Au-
 genblick T des Zusammenstoßes auf. dass dabei ‘ $g_{G_{x(T)}}$ ’, ausgerechnet das *Supremum* der
 Massen aller genidentischen Partner $G_{x(t)}$ von $G_{x(T)}$ bezeichnet, wird sich als für unsere
 Zwecke unerheblich herausstellen; jede obere Schranke würde im Prinzip genügen.

Beweis zu Abschätzung 2. Der Beweis erfolgt hier für $x(T')$, für $u(T')$ ist er analog durch-
 zuführen. Gemäß Postulat 1 hat $G_{x(T')}$ den Impuls $\vec{p}(G_{x(T')}) = \int_{G_{x(T')}} \vec{p}(z) dz$. Also folgt
 hieraus zusammen mit der *Integral-Dreiecksungleichung* [A2]

$$\left\| \int_D f(\varphi) d\varphi \right\| \leq \int_D \|f(\varphi)\| d\varphi \quad (\text{Integral-Dreiecksungleichung}) \quad (16)$$

welche eine Verallgemeinerung der *Dreiecksungleichung für Summen* (11) darstellt, für den
 Impulsbetrag die Ungleichung

$$\|\vec{p}(G_{x(T')})\| = \left\| \int_{G_{x(T')}} \vec{p}(z) dz \right\| \leq \int_{G_{x(T')}} \|\vec{p}(z)\| dz$$

In Postulat 6 war die Massendichte ‘ $m(\cdot)$ ’ als Quotient aus Impuls- und Geschwindig-
 keitsbetrag definiert worden. Wir können das rechte Integral der Ungleichung daher (ohne
 Fallunterscheidung) schreiben als

$$\int_{G_{x(T')}} \|\vec{p}(z)\| dz = \int_{G_{x(T')}} m(z) \cdot \|\mathbf{g}_{\bar{S}}(z)\| dz$$

Sämtliche m.m.P.e $z \in G_{x(T')}$ besitzen eine Schnelligkeit $\|\mathbf{g}_{\bar{S}}(z)\| \leq \delta$ gemäß Experiment-
 vorschrift, denn $G_{x(T')}$ ist die Kugel um x zum Zeitpunkt T' , also *nach Vollendung* des
 unelastischen Zusammenstoßes. Damit gilt die Ungleichung

$$\int_{G_{x(T')}} m(z) \cdot \|\mathbf{g}_{\bar{S}}(z)\| dz \leq \int_{G_{x(T')}} m(z) \cdot \delta dz = \delta \cdot \int_{G_{x(T')}} m(z) dz$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Ungleichung existiert gemäß Postulat 6 als die
Masse von $G_{x(T')}$, welche darüber hinaus nach Postulat 7 durch den Wert $g_{G_{x(T')}}$ beschränkt
 ist:

$$\delta \cdot \int_{G_{x(T')}} m(z) dz = \delta \cdot m(G_{x(T')}) \leq \delta \cdot g_{G_{x(T')}}$$

Da nach Postulat 7 die Massenschranke aber für *alle genidentischen Partner* von $G_{x(T')}$
 gilt, trifft sie speziell auch auf $G_{x(T)}$ im Augenblick T des Zusammenstoßes zu, mithin gilt:

$$\delta \cdot g_{G_{x(T')}} = \delta \cdot g_{G_{x(T)}}$$

Indem wir nun alle Ungleichungen dieses Beweises zusammenfassen, erhalten wir die be-
 hauptete Abschätzung. □

Nach Einsetzung von Abschätzung 2 in Zwischenresultat 1 aus 4.2 erhalten wir

Zwischenresultat 2. *Es gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} \\ & \quad + \delta \cdot g_{G_{x(T)}} + \delta \cdot g_{G_{u(T)}} \\ & \quad + \left\| \int_T^{T'} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

4.4 Abschätzung des Kraftstoßes ‘ $\int_T^{T'} \vec{F}(t) dt$ ’

Wenden wir uns dem verbliebenen Term ‘ $\int_T^{T'} \vec{F}(t) dt$ ’ des IES, dem Kraftstoß zu. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass wir (wieder unter Hinzunahme bestimmter physikalischer Postulate) in unserer Ungleichung aus dem Zwischenresultat 2 des vorangegangenen Kapitels in Wirklichkeit ohne die Angabe des Kraftstoßbetrages auskommen:

Zwischenresultat 3. *Es gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} + \delta \cdot g_{G_{x(T)}} + \delta \cdot g_{G_{u(T)}} \end{aligned}$$

Es wird dabei nicht nötig sein, die Identität ‘ $\|\int_T^{T'} \vec{F}(t) dt\| = 0$ ’ nachzuweisen. Das werden wir auch kaum erwarten dürfen, denn unser Gesamtsystem bestehend aus den zwei miteinander kollidierenden Kugeln ist im wahrsten Sinne nicht allein in der Welt: Wir haben keine vollständige Abschottung unseres Experiments von äußeren Einflüssen vorausgesetzt – lediglich einen gewissen Isoliertheitsgrad θ haben wir gefordert – und somit integriert der Kraftstoß-Term sämtliche von außen auf das System einwirkenden (nicht-kinematischen) Kräfte.

Jedoch erscheint es nicht völlig abwegig anzunehmen, dass wir das Experiment *im Prinzip* zu anderer Zeit, und notfalls an einem anderem Ort des Universums, wiederholen könnten; dann allerdings besser isoliert, um die äußeren Kräfte zu verringern, aber weiterhin mit den gleichen Kugeln („Wiederholungskörpern“ ($D_{2.7}^{\text{hm}}$), auffassbar als Drehkugel (DrKg_S , Def. 15 in 3.2.3) mit der *Identitätsfunktion* $f(\varphi) := \varphi$ als Drehfunktion $f \in \text{Orth}$), und auch ansonsten mit völlig gleich bleibenden Parametern wie z.B. der Zeitdauer des Experiments. Man würde also eine Folge von Experimenten mit Isoliertheitsgrad θ_k für das k -te Experiment im Zeitraum $[T_k, T'_k]$ mit den Kugeln $G_{x(T_k)}$ und $G_{u(T_k)}$ durchführen

können, das sich gemäß Zwischenresultat 2 beschreiben ließe durch die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T_k)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T_k))\| - \mu(V_{G_{u(T_k)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T_k))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T_k)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T_k)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T_k)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T_k)}} \cdot \sqrt{3} + \delta \cdot g_{G_{x(T_k)}} + \delta \cdot g_{G_{u(T_k)}} \\ & \quad + \left\| \int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

Da wir aber mit *Wiederholungskörpern* arbeiten, ändern sich weder die *Volumina*, noch die *Massenschranken* oder die *Lipschitzkonstanten* für die Körper, noch die *Impulse* der zu vergleichenden m.m.P.e. Es gilt also mit $T := T_1$, dem Zeitpunkt der *ersten* Durchführung des Experiments:

$$\mu(V_{G_{x(T_k)}}) = \mu(V_{G_{x(T)}}), \quad \vec{p}(x(T_k)) = \vec{p}(x(T)), \quad \lambda_{G_{x(T_k)}} = \lambda_{G_{x(T)}}, \quad g_{G_{x(T_k)}} = g_{G_{x(T)}}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für ‘ $u(T_k)$ ’. Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} + \delta \cdot g_{G_{x(T)}} + \delta \cdot g_{G_{u(T)}} \quad (17) \\ & \quad + \left\| \int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

In (17) ist nur noch der Kraftstoß vom k -ten Experiment abhängig.

Unser Gedankenexperiment wird i.W. bestimmt von drei impliziten Annahmen, nämlich *erstens*, dass der Isoliertheitsgrad θ_k unseres Experiments überhaupt für eine gewisse Beschränkung äußerer Kräfte sorgt, dass *zweitens* mit einer zunehmenden Vergrößerung des Isoliertheitsgrades auch die äußeren Einflüsse abnehmen *würden*, und *drittens*, dass man den Isoliertheitsgrad auch wirklich unbeschränkt erhöhen kann. Entsprechende Forderungen wurden bislang nicht gestellt, alles was wir besitzen ist mit Def. 5 (2.2.2, S. 5) die *Definition* der θ -Isoliertheit eines Systems.²³

Postulat 8 (Kraftschränke [h9]). *Zu einem θ -isolierten System D existiert eine kleinste obere Schranke $N_{\theta,D} \in \mathbb{R}_0^+$ derart, dass auf alle zu D genidentischen und dabei ebenfalls θ -isolierten Systeme $D(t)$ nur ein beschränkter äußerer Kraftbetrag $\|\vec{F}(t)\| \leq N_{\theta,D}$ wirkt. ‘ $N_{\theta,D}$ ’ bezeichnen wir als θ -Kraftschränke für D .²⁴*

Postulat 9 (Abnehmende Kräfte [h10]). *Gegeben sei eine Folge $(D_k)_{k \geq 1}$ von Wiederholungssystemen, und das k -te System D_k sei θ_k -isoliert. Für die Kraftschranken N_{θ_k, D_k} aus Postulat 8 gilt: $\lim_{\theta_k \rightarrow \infty} (N_{\theta_k, D_k}) = 0$.*

²³ Hermes bezeichnet den Isoliertheitsgrad mit ‘ ω ’ (vgl. [HE, S. 28]).

²⁴ Hermes nennt die Kraftschränke ‘ $N(K, \omega)$ ’ [HE, S. 28]. Essler behandelt die Kraftschränke in Abschnitt 15, wo er sie ‘ $\text{kr}\ddot{s}r_{S,u}(D, \theta)$ ’ nennt ($D_{5.8}^{\text{hm}}, A_{5.5}^{\text{hm}}$).

Postulat 10 (Isolierbarkeit). *Es sei D ein isoliertes System. Dann gibt es eine Folge $(D_k)_{k \geq 1}$ von θ_k -isolierten Wiederholungssystemen D_k , $D_1 = D$, mit $\lim_{k \rightarrow \infty} (\theta_k) = \infty$.*²⁵

Mit diesen Postulaten können wir eine Abschätzung für den Term ‘ $\|\int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt\|$ ’ aus (17) angeben. Der Betrag der äußeren Kraft $\vec{F}(t)$, die zum Zeitpunkt $t \in [T_k, T_{k'}]$ auf das nach Voraussetzung θ_k -isolierte System $G_{x(t)} \cup G_{u(t)}$ wirkt, ist gemäß Postulat 8 durch die Kraftschranke $N_{\theta_k, G_{x(t)} \cup G_{u(t)}}$ beschränkt (dieses System ist trivialerweise zu sich selbst genidentisch), sodass wir in Verbindung mit der Integral-Dreiecksungleichung (16) folgende Ungleichung erhalten:

$$\left\| \int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt \right\| \leq \int_{T_k}^{T'_k} \|\vec{F}(t)\| dt \leq \int_{T_k}^{T'_k} N_{\theta_k, G_{x(t)} \cup G_{u(t)}} dt$$

Das System $G_{x(t)} \cup G_{u(t)}$ ist für $t \in [T_k, T_{k'}]$ aber eine *genidentische Fortsetzung* des Systems $G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}$ zu Beginn T_k des Zusammenstoßes, welches ebenfalls θ_k isoliert ist. Postulat 8 besagt, dass die Kraftschranken in diesem Fall für beide Systeme identisch sind, also:

$$\int_{T_k}^{T'_k} N_{\theta_k, G_{x(t)} \cup G_{u(t)}} dt = \int_{T_k}^{T'_k} N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} dt$$

Der Integrand ist nun nicht mehr vom Zeitparameter ‘ t ’ abhängig, sodass wir aus den üblichen Rechenregeln der Integralrechnung [A1] erhalten:

$$\int_{T_k}^{T'_k} N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} dt = \left(\int_{T_k}^{T'_k} 1 dt \right) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} = (T'_k - T_k) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}}$$

Das k -te Experiment stellt, was seine Durchführungsdauer $|T'_k - T_k|$ betrifft, eine exakte Wiederholung des Ausgangsexperimentes dar, sodass wir schreiben können:

$$(T'_k - T_k) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} = (T' - T) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}}$$

Wir erhalten also insgesamt die Ungleichung

$$\left\| \int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt \right\| \leq (T' - T) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} \quad (18)$$

²⁵ Hermes fordert die Existenz einer solchen Folge von immer stärker isolierten Wiederholungssystemen in § 7 nirgends explizit; er sagt lediglich auf S. 28 oben

»[...] dass die von außen auf einen Körper ausgeübten Kräfte „gleichmäßig“ gegen Null konvergieren, falls [der Isoliertheitsgrad] ω gegen Unendlich geht.«

Diese rein implikative Formulierung entspricht unserem Postulat 9, es allein scheint aber nicht aus zureichen, um das gewünschte Zwischenresultat zu beweisen. Der Autor hat diese – ihm physikalisch ziemlich problematisch erscheinende – Forderung daher dem Gesamtsystem eigenmächtig hinzugefügt.

und nach Postulat 9 gilt:

$$\lim_{\theta_k \rightarrow \infty} \left[(T' - T) \cdot N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} \right] = (T' - T) \cdot \lim_{\theta_k \rightarrow \infty} \left[N_{\theta_k, G_{x(T_k)} \cup G_{u(T_k)}} \right] = (T' - T) \cdot 0 = 0 \quad (19)$$

Wir benötigen also nur noch eine Folge von Experimentwiederholungen, deren Isoliertheitsgrade θ_k unbeschränkt wachsen, für die also $\lim_{k \rightarrow \infty} (\theta_k) = \infty$ gilt. *dass* es eine solche Folge $(\theta_k)_{k \geq 1}$ gibt, dafür sorgt Postulat 10.

Wir fassen das Geleistete zusammen, wobei wir folgende Abkürzungen verwenden:

$$\begin{aligned} A_{x,u} &:= \left| \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T))\| - \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T))\| \right| \\ B_{x,u} &:= \mu(V_{G_{x(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{x(T)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T)}}) \cdot \rho \cdot \lambda_{G_{u(T)}} \cdot \sqrt{3} + \delta \cdot g_{G_{x(T)}} + \delta \cdot g_{G_{u(T)}} \\ I_{x,u}(k) &:= \left\| \int_{T_k}^{T'_k} \vec{F}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

Damit schreibt sich (17) als

$$A_{x,u} \leq B_{x,u} + I_{x,u}(k) \quad (20a)$$

Mit der allgemeinen Definition (3) für Folggrenzwerte (siehe S. 14) erhalten wir, wenn wir (18) und (19) zusammennemen, die Darstellung:

$$\bigwedge K > 0 \bigvee k_0 \in \mathbb{N} \bigwedge k \in \mathbb{N} (k \geq k_0) : I_{x,u}(k) \leq K \quad (20b)$$

Das Zeichen ‘ K ’, dessen Werte beliebig klein werden dürfen, steht dabei für die rechte Seite von (18), die gemäß (19) mit $\theta_k \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Die All-Existenz ($\bigvee k_0$) wird durch Postulat 10 gesichert. Unter Verwendung von (20a) erhalten wir aus (20b)

$$\bigwedge K > 0 \bigvee k_0 \in \mathbb{N} \bigwedge k \in \mathbb{N} (k \geq k_0) : A_{x,u} \leq B_{x,u} + I_{x,u}(k) \leq B_{x,u} + K \quad (20c)$$

Daraus folgt dann aber sofort

$$A_{x,u} \leq B_{x,u} \quad (20d)$$

denn angenommen, es würde $A_{x,u} > B_{x,u}$ gelten, dann wählen wir $K^* := \frac{1}{2}(A_{x,u} - B_{x,u})$, und da $K^* > 0$, gibt es nach (20c) ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} A_{x,u} &\leq B_{x,u} + I_{x,u}(k_0) \leq B_{x,u} + K^* = B_{x,u} + \frac{1}{2}(A_{x,u} - B_{x,u}) = \frac{A_{x,u} + B_{x,u}}{2} \\ \Leftrightarrow 2A_{x,u} &\leq A_{x,u} + B_{x,u} \\ \Leftrightarrow A_{x,u} &\leq B_{x,u} \end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Annahme steht. Gleichung (20d) stimmt aber mit Zwischenresultat 3 überein, welches damit bewiesen wäre.

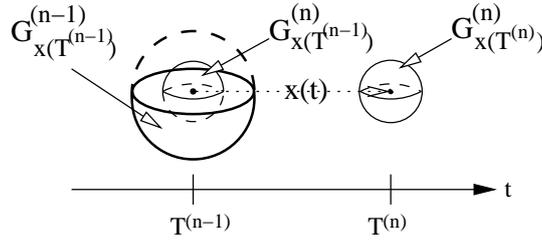


Abbildung 2: Teilkugel-Wiederholung

4.5 Kleiner werdende Radien ρ und Endschnelligkeiten δ

Wir wiederholen das Experiment nun in Gedanken für immer kleinere Radiusschranken ρ und Endschnelligkeiten δ für die in den Kugeln enthaltenen m.m.P.e, mit aber ansonsten gleichen Vorgaben. Die Kugeln zu Beginn der n -ten Iteration des Experiments, durchgeführt im Zeitraum $[T^{(n)}, T'^{(n)}]$, bezeichnen wir mit ‘ $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ ’, resp. ‘ $G_{u(T^{(n)})}^{(n)}$ ’. Das Zeichen ‘ $\rho^{(n)}$ ’, gibt den maximal erlaubten Radius der Kugeln $G_{x/u(T^{(n)})}^{(n)}$ an. Wir werden $\rho^{(n)} < \rho^{(n-1)}$ wählen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(n)} = 0$. Das Experiment werden wir dabei so durchführen, dass $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ die *genidentische Wiederholung* zum Zeitpunkt $T^{(n)}$ einer *Teilkugel* $G_{x(T^{(n-1)})}^{(n)}$ der im $(n-1)$ -ten Experiment eingesetzten Kugel $G_{x(T^{(n-1)})}^{(n-1)}$ ist. Dabei soll der Mittelpunkt der Teilkugel $G_{x(T^{(n-1)})}^{(n)}$ gleich dem Mittelpunkt $x(T^{(n-1)})$ von $G_{x(T^{(n-1)})}^{(n-1)}$ sein, womit $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ also den Mittelpunkt $x(T^{(n)})$ hat. Das genannte Szenario ist in Abb. 2 graphisch skizziert.²⁶

Allgemein werden wir die genidentischen Nachfolger zum Zeitpunkt t der Kugel $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ des n -ten Experimentes mit ‘ $G_{x(t)}^{(n)}$ ’, bezeichnen. Wir können mit unserer Abschätzung aus Zwischenresultat 3 also auch das n -te Experiment beschreiben:

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V_{G_{x(T^{(n)})}^{(n)}}) \cdot \|\vec{p}(x(T^{(n)}))\| - \mu(V_{G_{u(T^{(n)})}^{(n)}}) \cdot \|\vec{p}(u(T^{(n)}))\| \right| \\ & \leq \mu(V_{G_{x(T^{(n)})}^{(n)}}) \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{G_{x(T^{(n)})}^{(n)}} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{G_{u(T^{(n)})}^{(n)}}) \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{G_{u(T^{(n)})}^{(n)}} \cdot \sqrt{3} \\ & \quad + \delta^{(n)} \cdot g_{G_{x(T^{(n)})}^{(n)}} + \delta^{(n)} \cdot g_{G_{u(T^{(n)})}^{(n)}} \end{aligned}$$

wobei wir mit ‘ $\delta^{(n)}$ ’, die Schnelligkeitsschranke im n -ten Experiment benennen; es wird ebenfalls $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = 0$ gelten.

Entscheidend wird sein, dass die Impulsbeträge der m.m.P.e $x(T^{(1)}), \dots, x(T^{(n)}), \dots$ jeweils *zu Beginn* aller dieser Experimente paarweise identisch sind (und Gleiches hat natürlich für die Nachfolger von u zu gelten). Der Grund hierfür ist, dass wir ja das nahezu gleiche Experiment durchführen, nur dass die umgebenden Kugeln kleiner werden, und die

²⁶ Man beachte: Die hier betrachtete Sequenz von Experimenten zu den Zeitpunkten $T^{(n)}$ hat mit den Experimentwiederholungen bei der Abschätzung des Kraftstoßes in 4.4 nichts zu tun.

End-Schnelligkeiten der in den Kugeln enthaltenen m.m.P.e geringer ausfallen werden. Offenbar sind die gewöhnlichen Punkte $x(T^{(n)})$ allesamt *identisch dicht* zu $x(T^{(1)})$ gemäß Definition 10 (2.2.6, S. 8), denn wir arbeiten gemäß Impulsbetragsdefinition 16 (S. 12) mit *Teildrehkugeln* („DrKg_S|TlMoKo_S“): $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ ist eine (allenfalls gedrehte) Wiederholungs-Teilkugel von $G_{x(T^{(1)})}^{(n)} \subseteq G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$, d.h. um $x(T^{(n)})$ herum gibt es eine lokale Umgebung, zu der es ein *gleichartiges genidentisches Äquivalent* um $x(T^{(1)})$ herum gibt, sodass das *Kompressionsverhältnis* dieser beiden Punkte gerade 1 sein muss („ $\langle x(T^{(1)}), x(T^{(n)}), 1 \rangle \in \text{Cpr}$ “). Und nach Konstruktion des Experiments hat $x(T^{(n)})$ auch die *gleiche Schnelligkeit* wie $x(T^{(1)})$. Wir fordern nun

Postulat 11 (Identisch dichte m.m.P.e [h8]). *Für zwei gemäß Def. 10 identisch dichte m.m.P.e z_1 und z_2 (vgl. 2.2.6, S. 8) mit $g\bar{s}_S(z_2) = g\bar{s}_S(z_1)$ gilt: $\vec{p}(z_2) = \vec{p}(z_1)$.*²⁷

Aus Postulat 11 ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\|\vec{p}(x(T^{(n)}))\| &= \|\vec{p}(x(T^{(1)}))\| =: \|\vec{p}(x)\| \\ \|\vec{p}(u(T^{(n)}))\| &= \|\vec{p}(u(T^{(1)}))\| =: \|\vec{p}(u)\|\end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind reine Abkürzungen: Die angegebenen Impulsbeträge werden sich stets auf den Zeitpunkt $T^{(1)}$ des ersten Experiments beziehen, sie sind also unabhängig vom Laufindex ‘ n ’, und in sofern reicht es aus anzugeben, ob es sich im jeweiligen Fall um den Impuls von x oder u handelt. Als weitere Abkürzungen werden wir von jetzt an verwenden:

$$V_{x(t)}^{(n)} := V_{G_{x(t)}^{(n)}} , \quad \lambda_{x(t)}^{(n)} := \lambda_{G_{x(t)}^{(n)}} , \quad g_{x(t)}^{(n)} := g_{G_{x(t)}^{(n)}}$$

sowie entsprechende Abkürzungen für ‘ $u(t)$ ’. Mit diesen Vorarbeiten ergibt sich aus Zwischenresultat 3 demnach folgendes

Zwischenresultat 4.

$$\begin{aligned}& \left| \mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \|\vec{p}(x)\| - \mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \|\vec{p}(u)\| \right| \\ & \leq \mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{x(T^{(n)})}^{(n)} \cdot \sqrt{3} + \mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{u(T^{(n)})}^{(n)} \cdot \sqrt{3} \\ & \quad + \delta^{(n)} \cdot g_{x(T^{(n)})}^{(n)} + \delta^{(n)} \cdot g_{u(T^{(n)})}^{(n)}\end{aligned}$$

²⁷ Ein gewisses Problem mit diesem Postulat, welches eine direkte Übertragung des Hermesschen heuristischen Prinzips **h8** darstellt, ergibt sich für eine *gedrehte* (DrKg_S) Nachfolgekugel. Offenbar kann deren Mittelpunkt nicht den gleichen Impuls besitzen wie derjenige ihres Vorgängers, denn jener besitzt eine andere Geschwindigkeits*richtung*: Wenn $f \in \text{Orth}$ die zugrunde liegende Drehfunktion ist, dann gilt nach Definition 15 (S. 12)

$$g\bar{s}_S(x(T^{(n)})) = f(g\bar{s}_S(x(T^{(1)})))$$

Das *Wesen* des hier angegebenen Postulats und die daraus gezogenen Folgerungen sollten aber keinen unbeheblichen Schaden nehmen, wenn man es an die Gegebenheiten der Drehung anpaßt, etwa in folgender Form:

„Für zwei identisch dichte m.m.P.e z_1 und z_2 mit $g\bar{s}_S(z_2) = f(g\bar{s}_S(z_1))$ gilt: $\vec{p}(z_2) = f(\vec{p}(z_1))$.“

Natürlich gilt die Ungleichung immer noch, wenn wir die Betragsstriche auf der linken Seite der Ungleichung weglassen, denn aus $|a| \leq b$ folgt $a \leq b$. Dies tuend erhalten wir aus der dergestalt modifizierten Ungleichung nach Umstellung der Terme und Division durch den (positiven!) Wert $\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \|\vec{p}(u)\|'$:

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{p}(x)\|}{\|\vec{p}(u)\|} - \frac{\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)})}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} &\cdot \left[1 + \overbrace{\frac{1}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{u(T^{(n)})}^{(n)} \cdot \sqrt{3}}^{A_{1,u}^{(n)}} + \overbrace{\frac{1}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \delta^{(n)} \cdot \frac{1}{\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)})} \cdot g_{u(T^{(n)})}^{(n)}}^{A_{2,u}^{(n)}} \right] \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \rho^{(n)} \cdot \lambda_{x(T^{(n)})}^{(n)} \cdot \sqrt{3}}_{A_{1,x}^{(n)}} + \underbrace{\frac{1}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \delta^{(n)} \cdot \frac{1}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} \cdot g_{x(T^{(n)})}^{(n)}}_{A_{2,x}^{(n)}} \end{aligned} \quad (21)$$

Unser Ziel wird es sein nachzuweisen, dass die Folgen $(A_{1,x}^{(n)})_n$, $(A_{2,x}^{(n)})_n$, $(A_{1,u}^{(n)})_n$ und $(A_{2,u}^{(n)})_n$ für $n \rightarrow \infty$ allesamt gegen 0 konvergieren, falls zugleich $\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta^{(n)}) = 0$.

4.5.1 Nullkonvergenz der Folgen $(A_{1,*}^{(n)})_n$

Wir betrachten als erstes den Term $A_{1,x}^{(n)}$. Die darin auftretende Lipschitzkonstante $\lambda_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ ist vom Momentankörper $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ abhängig, welcher allerdings die genidentische Replik eines *Teilmomentankörpers* $G_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ der im ersten Experiment verwendeten Kugel $G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ darstellt. Auch zu $G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ gibt es eine Lipschitzkonstante $\lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}$. Aus Postulat 4 folgt, dass für je zwei Punkte $y, z \in G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ die Lipschitzbedingung gilt, also insbesondere auch für je zwei Punkte $y, z \in G_{x(T^{(1)})}^{(n)} \subseteq G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$. Die Lipschitzkonstante eines Teilkörpers kann also nicht größer ausfallen als diejenige des Gesamtkörpers, und daher erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$\lambda_{x(T^{(n)})}^{(n)} = \lambda_{x(T^{(1)})}^{(n)} \leq \lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}$$

$\lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ ist eine Konstante bzgl. n , und wir erhalten mit

$$A_{1,x}^{*(n)} := \rho^{(n)} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \geq \rho^{(n)} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda_{x(T^{(n)})}^{(n)}}{\|\vec{p}(u)\|} = A_{1,x}^{(n)}$$

und der Tatsache, dass sämtliche Ausdrücke in $A_{1,x}^{(n)}$ nichtnegativ sind, die Ungleichung:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{1,x}^{(n)})_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{1,x}^{*(n)})_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(n)} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} = \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(n)} = \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot 0 = 0$$

Alle durchgeführten Schritte sind elementare Rechenregeln der Infinitesimalrechnung [A1]. Die Nullkonvergenz ist damit für $(A_{1,x}^{(n)})_n$ bewiesen. Für $(A_{1,u}^{(n)})_n$ gilt eine analoge Argumentation, sodass auch diese Folge für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

4.5.2 Nullkonvergenz der Folgen $(A_{2,*}^{(n)})_n$

Wir wenden uns dem Term $A_{2,x}^{(n)}$ zu. Hier lautet die kritische Frage, wie sich der Ausdruck $g_{x(T^{(n)})}^{(n)} / \mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})$ für $n \rightarrow \infty$ verhalten wird, denn Zähler und Nenner dieses Quotienten werden sich mit n verändern. Dabei war $g_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ die maximal mögliche Masse aller genidentischen Partner $G_{x(t)}^{(n)}$ von $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$. Aus den bisherigen Forderungen ist nicht ersichtlich, wie die Massenschranken sich mit abnehmendem Volumen verhalten werden. Aber es würde für eine Theorie der klassischen Physik ungewöhnlich erscheinen, wenn die *Massendichte* unbeschränkt zunehmen könnte. Wir werden dies daher explizit verbieten:

Postulat 12 (Beschränkte Maximalmassendichte [h7]). *Sei G ein Momentankörper, und $M_G := \{ \frac{g_{G'}}{\mu(V_{G'})} \mid \langle G', G \rangle \in \text{TlMoKo}_S \}$ sei die Menge der maximal möglichen Massendichten aller Teilmomentankörper von G mit den Massenschranken $g_{G'}$ gemäß Postulat 7. Es gilt: Zu M_G existiert eine kleinste obere Schranke $\gamma_G := \sup(M_G)$.²⁸*

Wir stellen nun als erstes fest, dass

$$\frac{g_{x(T^{(n)})}^{(n)}}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} = \frac{g_{x(T^{(1)})}^{(n)}}{\mu(V_{x(T^{(1)})}^{(n)})} \quad (22)$$

ist: Die Gleichheit der beiden *Zähler* des linken und rechten Terms ergibt sich, weil $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ und $G_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ genidentisch sind: g_G war in Postulat 7 als Massenschranke über *alle genidentischen Partner* $G(t)$ von G definiert worden. Die *Nenner* der Gleichung sind identisch, weil $G_{x(T^{(n)})}^{(n)}$ sogar Wiederholungskörper der Teilkugel $G_{x(T^{(1)})}^{(n)} \subseteq G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ ist und daher insbesondere das gleiche Volumen besitzt.

Mit Postulat 12 und der Abkürzung

$$\gamma_{x(t)}^{(n)} := \gamma_{G_{x(t)}^{(n)}}$$

ergibt sich nun die Ungleichung

$$\frac{g_{x(T^{(1)})}^{(n)}}{\mu(V_{x(T^{(1)})}^{(n)})} \leq \gamma_{x(T^{(1)})}^{(n)} \leq \gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)} \quad (23)$$

²⁸ Hermes bezeichnet die maximale Massendichte mit $\gamma(G)$ (vgl. [HE, S. 27]). Es sei verdeutlicht, dass wir hier, analog zu Hermes Vorgehensweise, als Zähler der Quotienten aus M_G die Größe $g_{G'}$ der *maximalen* Masse aller zu G' *genidentischen Partner* $G'(t)$ wählen, und nicht, wie dies Essler in A_{6.3}^{hm} [ES, S. 187] tut, lediglich die (i.a. geringere) Masse $m(G')$ der Teilkugel $G' \subseteq G$ selbst. Es ist dem Autor bisher nicht gelungen, die hier durchgeführten Erörterungen mit Esslers schwächerer Forderung zum Erfolg zu führen.

Die linke Ungleichung ist richtig, weil $\gamma_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ gemäß Postulat 12 eine obere Schranke für alle Quotienten ‘ $\frac{g_{G'}}{\mu(V_{G'})}$ ’, von Teilmomentankörpern $G' \subseteq G_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ darstellt, insbesondere also auch für $G_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ selbst. Nun ist aber $G_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ seinerseits eine Teilkuugel von $G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$, womit jeder Quotient ‘ $g_{G'}/\mu(V_{G'})$ ’ für $\langle G', G_{x(T^{(1)})}^{(n)} \rangle \in \text{TlMoKo}_S$ stets auch in der Menge der *maximal möglichen Massendichten* von $G_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ liegt. Mithin muss $\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ mindestens die Größe von $\gamma_{x(T^{(1)})}^{(n)}$ besitzen, und somit stimmt auch die rechte Ungleichung. Aus (22) und (23) folgt somit $g_{x(T^{(n)})}^{(n)}/\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)}) \leq \gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}$, und $\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}$ ist eine Konstante bzgl. n . Mit der Setzung

$$A_{2,x}^{*(n)} := \delta^{(n)} \cdot \frac{\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \geq \delta^{(n)} \cdot \frac{g_{x(T^{(n)})}^{(n)}}{\|\vec{p}(u)\| \cdot \mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} = A_{2,x}^{(n)}$$

und der Tatsache, dass sämtliche Ausdrücke in $A_{2,x}^{(n)}$ nichtnegativ sind, erhalten wir folgende Ungleichung:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2,x}^{(n)})_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2,x}^{*(n)})_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} \cdot \frac{\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} = \frac{\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = \frac{\gamma_{x(T^{(1)})}^{(1)}}{\|\vec{p}(u)\|} \cdot 0 = 0$$

Auch hier sind die durchgeführten Schritte elementarmathematisch, womit die Nullkonvergenz für $(A_{2,x}^{(n)})_n$ bewiesen ist. Der Term $A_{2,u}^{(n)}$ verschwindet für $n \rightarrow \infty$ mit einer analogen Argumentation.

4.5.3 Resultat nach Grenzwertbildung

Nach Grenzwertbildung für $n \rightarrow \infty$ verschwinden in (21), wie in 4.5.1 und 4.5.2 gesehen, die Terme ‘ $A_{1,x}^{(n)}$ ’, ‘ $A_{1,u}^{(n)}$ ’, ‘ $A_{2,x}^{(n)}$ ’ und ‘ $A_{2,u}^{(n)}$ ’, sodass sich im Ergebnis folgende Beziehung ergibt:

$$\frac{\|\vec{p}(x)\|}{\|\vec{p}(u)\|} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)})}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} \leq 0 \tag{24a}$$

Wir hätten die beiden Terme ‘ $\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \|\vec{p}(x)\|$ ’ und ‘ $\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)}) \cdot \|\vec{p}(u)\|$ ’ auf der linken Seite von Zwischenresultat 4 innerhalb der Betragsstriche auch vertauschen können, ohne dass dies den Inhalt der Ungleichung verändert hätte, denn allgemein gilt $|a - b| = |b - a|$. Wenn wir damit die komplette Argumentation, die über (21) bis hin zu (24a) geführt hat, wiederholen, so erhalten wir zusätzlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)})}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} - \frac{\|\vec{p}(x)\|}{\|\vec{p}(u)\|} \leq 0 \tag{24b}$$

Insgesamt ergibt sich aus (24a) und (24b) also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(V_{u(T^{(n)})}^{(n)})}{\mu(V_{x(T^{(n)})}^{(n)})} = \frac{\|\vec{p}(x)\|}{\|\vec{p}(u)\|}$$

Im Grenzwert für $\rho \rightarrow 0$ und $\delta \rightarrow 0$ strebt das Volumenverhältnis somit gegen das Verhältnis der Impulsbeträge, und dies war nach den Ausführungen in 4.1 zu zeigen!

5 Fazit

Wir haben die Grundzüge einer Axiomatisierung der klassischen Mechanik kennen gelernt, die auf den beiden Grundbegriffen „Genidentität“ und „Bezugssystem“ basiert. Im Zentrum unserer Betrachtungen stand die Definition des *Impulsbegriffes*, vor allem die des *Impulsbetrages*, welche in Form einer komplizierten Operationalisierung in strikt kinematischer Weise angegeben wurde. Dabei ergab sich das Problem, dass der als *Grenzwert einer Folge von Volumenverhältnissen* zweier miteinander kollidierender Kugeln eingeführte Begriff möglicherweise gar nicht deckungsgleich mit dem in herkömmlichen Darstellungen der Mechanik enthaltenen Impulsbetrag ist. Indem wir uns aber auf den Standpunkt einer *fertigen Mechanik* gestellt haben, gegeben durch eine Reihe von Postulaten, die in der Physik vermutlich allgemein akzeptiert sind, ist es uns gelungen zu beweisen, dass in einem solchen System der besagte Grenzwert mit dem Impulsbetrag übereinstimmt.

Einige relevante Fragen sind offen geblieben. Als erstes sei die Frage nach der Notwendigkeit des vom Autor zusätzlich eingeführten Postulats 10 auf S. 34 genannt, worin i.W. gefordert wird, dass ein Körper beliebig stark isoliert, d.h. dass sein Abstand zum nächsten Materiepartikel beliebig vergrößert werden kann. Dem Autoren erscheint dies als eine starke, wenngleich plausible Annahme, die übrigens von Essler über Axiom $A_{5,2}^{hm}$ [ES, S. 178] vermutlich ebenfalls verlangt wird. Als zweites interessiert uns, welche Klasse von Formen die Volumina von Körpern annehmen dürfen, damit für sie wirklich allein aus der *Randstetigkeit* ihrer Impulsdichte bereits deren Integrierbarkeit und damit die Existenz des Körperimpulses folgt. Der Begriff des *Volumens*, wie wir ihn hier verwenden („beschränkt“, „offen“ und „zusammenhängend“, Def. 3 auf S. 5), dürfte zu allgemein definiert sein, als dass dies immer gelten wird, aber zumindest für *Kugeln* ist es richtig (vgl. die Diskussion in 3.4 auf S. 16). Das dritte Problem ist mit dem zweiten verwandt: Welche Eigenschaften müssen Impulsdichte und Körperform besitzen, damit man wirklich einen *Mittelwertsatz* erhält, der demjenigen im eindimensionalen Fall entspricht? Nur dann ist nämlich die Argumentation aus 4.2.1 auf S. 24, die zur Abschätzung der *Körper*-Impulsbeträge aus dem IES durch *Momentanpunkt*-Impulsbeträge, wie sie in der zu beweisenden Zielgleichung auftreten, geführt hatte, formal rechtens.

Sieht man einmal von diesen formal-technischen Problemen ab, so besteht der nächste Schritt in der Herleitung sämtlicher für unsere Zwecke angenommenen Postulate aus den Axiomen des eigenen Systems. In seiner Originalarbeit gelingt dies Hans Hermes an späterer Stelle tatsächlich [HE, § 11], sodass sich das herkömmliche physikalische System, welches

bislang eher als *neben* der Hermesschen Axiomatik stehend betrachtet werden musste, dann als Teilsystem dessen herausstellt. Andererseits kann man für die sonstigen Aspekte der Hermesschen Theorie eigentlich recht leicht ersehen, dass sie mit den klassischen Darstellungen vereinbar sind. So z.B. die *Kraft*, welche in Übereinstimmung mit der Schulphysik als *Ableitung des Impulses* [ES, Abschnitt 15] definiert wird, oder auch die (*bewegte*) *Masse*, die bei Hermes wie üblich dem *Quotienten zwischen Impulsbetrag und Geschwindigkeitsbetrag* entspricht. Es sollte daher nicht unmöglich sein, umgekehrt aus der Gesamtheit der Postulate die restlichen Axiome der Hermesschen Theorie zu gewinnen. In diesem Fall wäre ein *Äquivalenznachweis*, oder solange die genannten Postulate noch nicht als physikalische Gesetze „offiziell anerkannt“ wurden, zumindest eine gute Äquivalenzbegründung gelungen zwischen der Hermesschen kinematik-zentrierten Theorie und den klassischen Darstellungen, welche in stärkerem Maße auf den Begriffen „Kraft“ und „Masse“ beruhen. Auch wenn Hermes so weit nicht gegangen ist, so dürfte er mit seinen „heuristischen Vorbetrachtungen“, wie wir sie in Kapitel 4 rekonstruiert haben, doch einen wesentlichen Baustein zu einem solchen Äquivalenzbeweis erbracht haben – plausibler ist die Hermessche „Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik“ damit in jedem Fall geworden.

Literatur

- [HE] H. Hermes: „*Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik*“ (Dissertation). Philosophische und Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Münster i.W., 1938
- [ES] W. Essler, J. Labude, S. Ucsnay: „*Theorie und Erfahrung: Eine Einführung in die Wissenschaftstheorie*“. Verlag Karl Alber, Freiburg/München, 2000
- [L1] W. Essler, R. Martínez: „*Grundzüge der Logik I – Das logische Schließen*“ (4. Aufl.). Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 1991
- [L2] W. Essler, E. Brendel: „*Grundzüge der Logik II – Klassen, Relationen, Zahlen*“ (4. Aufl.). Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 1993
- [W1] W. Essler: „*Wissenschaftstheorie I – Definition und Reduktion*“ (2. Aufl.). Verlag Karl Alber, Freiburg/München, 1982
- [A1] H. Heuser: „*Lehrbuch der Analysis, Teil 1*“ (9. Aufl.). Teubner Verlag, Stuttgart, 1991
- [A2] H. Heuser: „*Lehrbuch der Analysis, Teil 2*“ (7. Aufl.). Teubner Verlag, Stuttgart, 1992
- [LA] U. Storch, H. Wiebe: „*Lehrbuch der Mathematik, Band II: Lineare Algebra*“ BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim, 1990